

# Grup dan Field

# GRUP

Suatu himpunan  $G$  dengan operasi  $*$ , ditulis  $(G, *)$ , disebut grup jika untuk semua  $a, b, c \in G$  berlaku :

1. tertutup;  $a * b \in G$
2. asosiatif;  $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Mempunyai elemen identitas  $z \in G$ , sehingga  $a * z = a$
4. Untuk semua  $a \in G$ ,  $a$  mempunyai invers  $a^{-1}$  sedemikian hingga  $a * a^{-1} = z$

Contoh : Himpunan  $H = \{ 0, 1, 2 \}$  dengan operasi ***penjumlahan modulo 3*** apakah merupakan grup ?

Solusi :

1. Tertutup  
dipenuhi

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Jadi  $(H, +)$   
merupakan  
**grup.**

2. Asosiatif dipenuhi (silahkan cek !)

3. Identitas  $z = 0$

4. Invers :  $0^{-1} = 0$ ,  $1^{-1} = 2$ ,  $2^{-1} = 1$

Jika suatu grup memenuhi sifat (5) *Komutatif*, maka dinamakan **grup abelian** atau **grup komutatif**.

Jadi *Grup Komutatif* harus memenuhi sifat :

1. tertutup
2. asosiatif
3. mempunyai elemen identitas
4. setiap unsurnya mempunyai invers
5. komutatif

Dapat ditunjukkan bhw Himpunan  $H = \{ 0, 1, 2 \}$  dengan operasi **penjumlahan modulo 3** merupakan grup komutatif.

Berikut ini apakah grup ? Grup komutatif ?

1.  $H = \{ 1, -1, i, -i \}$  di mana  $i = \sqrt{-1}$ , dengan operasi perkalian.
2. Himpunan bilangan asli dengan operasi penjumlahan.
3. Himpunan bilangan cacah dengan operasi penjumlahan.
4. Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.

X	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Tertutup ? Ya

Asosiatif ? Ya

Komutatif ? Ya

Identitas :  $Z = 1$

Invers :  $1^{-1} = 1$      $i^{-1} = -i$

$-1^{-1} = -1$      $-i^{-1} = i$

Jadi Grup

Grup komutatif

# FIELD

Suatu himpunan  $F$  dengan operasi pertama  $(+)$  dan operasi kedua  $(\times)$ , ditulis  $(F, +, \times)$ , disebut field jika untuk semua  $a, b, c \in F$  memenuhi sifat :

Untuk operasi pertama  $(+)$  memenuhi sifat :

1. tertutup;  $a + b \in F$
2. asosiatif;  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. mempunyai elemen identitas  $z$ ;  
sedemikian hingga  $a + z = a$
4. setiap unsurnya mempunyai invers; setiap  
 $a$  ada  $a^{-1}$  sehingga  $a + a^{-1} = z$
5. komutatif;  $a + b = b + a$

## FIELD (*lanjut..*)

Untuk operasi kedua ( $\times$ ) memenuhi sifat :

6. tertutup;  $a \times b \in F$
7. asosiatif;  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
8. mempunyai elemen identitas  $u$ ;  
sedemikian hingga  $a \times u = a$
9. selain  $z$ , setiap unsurnya mempunyai  
invers; setiap  $a$  ada  $a^{-1}$  shg  $a \times a^{-1} = u$
10. komutatif;  $a \times b = b \times a$

Untuk operasi kedua ( $\times$ ) terhadap operasi pertama (+) memenuhi sifat :

11. distributif;  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$   
atau  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

Memperhatikan definisi tersebut, dapat diringkaskan menjadi :

$(F, +, \cdot)$  adalah field jika :

1. terhadap operasi  $(+)$  merupakan grup komutatif
2. terhadap operasi  $(\cdot)$  merupakan grup komutatif
3. operasi  $(\cdot)$  terhadap operasi  $(+)$  berlaku sifat distributif.

# Manakah yang merupakan field terhadap Operasi $+$ dan $\times$ ?

1. Himpunan bilangan bulat  $\longrightarrow$  Bukan field
2. Himpunan bilangan rasional  $\longrightarrow$  field
3. Himpunan bilangan real  $\longrightarrow$  field

Catatan :

anggota-anggota dari field disebut ***skalar***.

Karena bilangan himpunan bilangan real terhadap operasi  $+$  dan  $\times$  merupakan field, maka anggota-anggota bilangan real dapat disebut sebagai skalar.