

RUANG VEKTOR (Vector Space) dan Ruang Bagian (Subspace)

RUANG VEKTOR (*VECTOR SPACE*)

Diketahui himpunan V dengan $u, v, w \in V$ dan operasi $(+)$ berlaku diantara anggota-anggota V .
Diketahui Field F dengan $a, b \in F$.
Antara anggota-anggota F dan anggota-anggota V berlaku operasi (\times) .
Himpunan V disebut *ruang vektor* atas field F jika berlaku :

Untuk operasi (+) pada anggota-anggota V memenuhi sifat :

1. tertutup; $u + v \in V$
2. asosiatif; $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. mempunyai elemen identitas 0 ;
sedemikian hingga $u + 0 = u$
4. setiap unsurnya mempunyai invers; setiap u ada $(-u)$ sehingga $u + (-u) = 0$
5. komutatif; $u + v = v + u$

Antara anggota-anggota F dengan anggota-anggota V memenuhi sifat :

6. tertutup; $a u \in V$

7. distributif; $a (u + v) = a u + a v$

8. distributif; $(a + b) u = a u + b u$

9. asosiatif; $a (b u) = (a b) u$

10. identitas perkalian; ada $1 \in F$, sehingga
 $1 u = u$

Catatan :

1. Jika V merupakan *ruang vektor*, anggota-anggota V disebut *vektor*.
2. Operasi penjumlahan pada V selanjutnya disebut operasi *penjumlahan vektor*
3. Operasi perkalian antara anggota F dengan anggota V disebut *perkalian skalar*
4. Vektor $0 \in V$ yg merupakan elemen identitas penjumlahan vektor, disebut Vektor nol.
5. Vektor $(-u)$ yang merupakan invers dari vektor u adalah lawan atau negatif dari u .

Berdasarkan definisi ruang vektor tersebut, semua himpunan yang memenuhi ke 10 sifat tersebut dinamakan ruang vektor; dan anggota-anggotanya dapat disebut sebagai vektor.

Contoh :

$M = \{ \text{semua matriks berdimensi } 3 \times 2 \}$.

Operasi penjumlahan pada M adalah operasi penjumlahan matriks. Operasi perkaliannya adalah perkalian skalar dari F dengan anggota-anggota M .

Apakah M merupakan ruang vektor ?

Solusi :

Ambil $A_{3 \times 2}, B_{3 \times 2}, C_{3 \times 2} \in M$

1. Tertutup dipenuhi, sebab $A + B = D_{3 \times 2} \in M$

2. asosiatif dipenuhi, sebab $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. Mempunyai identitas, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sehingga $A + O = A$

4. Untuk setiap $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ ada $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{pmatrix}$ sehingga $A + -A = 0$

5. Komutatif dipenuhi ; $A + B = B + A$

6. Untuk $k, m \in F$; maka $kA \in M$

7. distributif; $k(A + B) = kA + kB$

8. distributif; $(k + m)A = kA + mA$

9. asosiatif; $k(mA) = (km)A$

10. identitas perkalian; ada $1 \in F$, sehingga $1A = A$

Karena 10 sifat dipenuhi, maka M adalah ruang vektor.

Manakah yang merupakan ruang vektor ?

1. $P = \{\text{semua polinom berderajat } 2\}$, dengan operasi penjumlahan antara polinom dan perkalian skalar dengan polinom.

2. Himpunan *2-tuple*, dengan operasi penjumlahan adalah sbb :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

dengan operasi perkalian didefinisikan

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

3. Himpunan *2-tuple*, dengan operasi penjumlahan adalah sbb :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Himpunan pasangan berurutan dari n bilangan real (n -tuple) :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

dengan operasi penjumlahan yg didefinisikan dengan :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

dengan operasi perkalian
Didefinisikan :

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

Himpunan n -tuple tersebut memenuhi 10 sifat ruang vektor. Jadi himpunan n -tuple dari bilangan real adalah ruang vektor. Secara umum dinyatakan dengan \mathbb{R}^n .

Teorema 1:

Andaikan V adalah ruang vektor dengan $u \in V$ dan $k \in F$, maka

(i) Untuk $0 \in F$, berlaku $0 u = O$

(ii) Untuk $O \in V$, berlaku $k O = O$

(iii) Untuk $-1 \in F$, berlaku $(-1) u = -u$

(iv) Jika $k u = O$, maka $k = 0$ atau $u = O$

(v) $-(k u) = (-k) u = k (-u)$

$0 \in F$, berlaku $0 u = 0$

Bukti :

$0 + 0 = 0$ sifat field

$(0 + 0) u = 0 u$

$0u + 0u = 0u$ sifat RV ke 7

$0u + 0u + (-0u) = 0u + (-0u)$

$0u + 0 = 0$ sifat RV ke 4

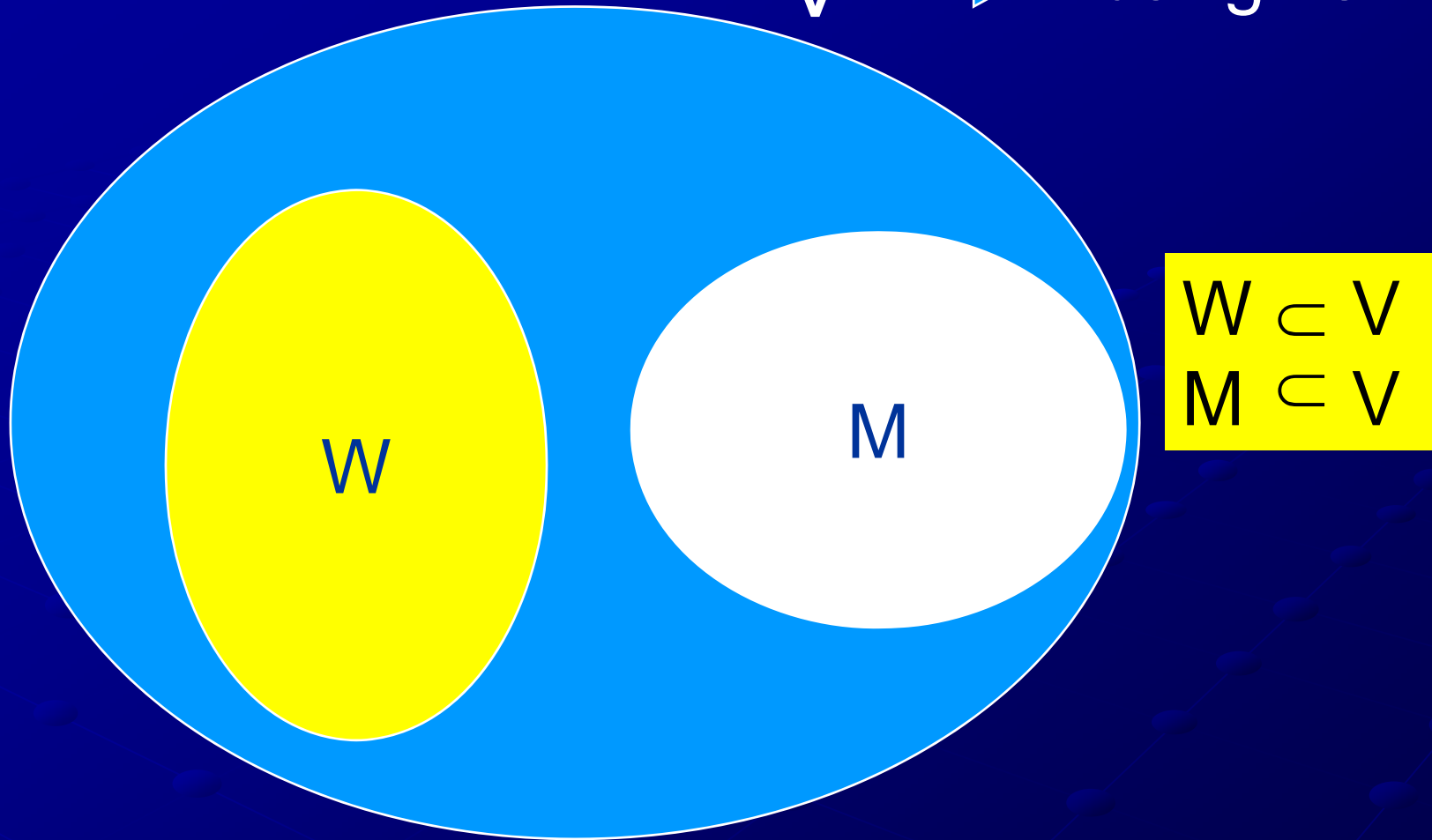
$0u = 0$ sifat RV ke 3

(terbukti).

RUANG VEKTOR BAGIAN



$V \rightarrow$ Ruang vektor



Jika W memenuhi 10 aksioma ruang vektor, maka W disebut Ruang Bagian (*Subspace*) V

Ruang Vektor Bagian (*Subspace*)

Teorema :

W adalah *subspace* dari ruang vektor V jika dan hanya jika

- W tidak kosong
- Tertutup terhadap penjumlahan; $u, v \in W$;
 $u + v \in W$
- Tertutup terhadap perkalian; $u \in W$,
 $au \in W$; dengan a adalah skalar.

Akibat Teorema :

W *subspace* dari ruang vektor V jika dan hanya jika :

➤ $0 \in W$

➤ Untuk $u, v \in W$, maka $ku + lv \in W$;
dengan k, l adalah skalar.

Contoh :

Andaikan $V = \mathbb{R}^3$.

Apakah $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid b = 2c; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Selidiki apakah W *subspace* dari V ?.

(i) $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ anggota W sebab $0 = 2 \cdot 0$

(ii) Misal $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ dengan syarat $b_1 = 2c_1$

$v = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dengan syarat $b_2 = 2c_2$

$$ku + lv = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ kc_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} la_2 \\ lb_2 \\ lc_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + la_2 \\ kb_1 + lb_2 \\ kc_1 + lc_2 \end{pmatrix}$$

$$kb_1 + lb_2 = 2kc_1 + 2lc_2 = 2(kc_1 + lc_2)$$

Jadi $ku + lv$ adalah anggota W .

Jadi W subspace V

Teorema :

Andaikan U dan W adalah subspace dari V ,
maka $U \cap W$ juga *subspace* dari V

Bukti :

● Karena U dan W adalah *subspace*, maka $0 \in U$ dan $0 \in W$, berarti $0 \in (U \cap W)$.

● Ambil $u, v \in (U \cap W)$, berarti :

$$\begin{array}{l} u, v \in U \implies au + bv \in U \\ u, v \in W \implies au + bv \in W \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u, v \in U \\ u, v \in W \end{array}} \right\} \implies au + bv \in (U \cap W).$$

Jadi $U \cap W$ adalah *subspace* dari V .

Contoh :

Andaikan $V = \mathbb{R}^3$. Jika U dan W adalah subspace V dengan :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b = 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \text{ dan}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = 2c; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \text{ maka :}$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b = 0; \quad a = 2c; \text{ dng } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tunjukkan bahwa $U \cap W$ juga *subspace* dari V .