KOMBINASI LINEAR
BEBAS LINEAR
BERGANTUNG LINEAR

Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Kombinasi Linear (*linear combination*)

Andaikan ruang vektor V melalui field F, dengan vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. Sembarang vektor di dalam V (misal $v \in V$) yang dapat dinyatakan dlm bentuk :

$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$; dng $a_i \in F$

dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Contoh :

Andaikan *s, u, v, w* $\in$ V; dengan

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dan } s = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jika mungkin nyatakan *v* sbg kombinasi linear dari *u*, *s*, dan *w* !

Solusi :

$v = xu + ys + zw$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan:

$x - y + 2z = -1$

$-x - 3y + z = 0$

$2x + 6y - z = 1$

Diperoleh nilai-nilai

x = -2, y = 1, dan z = 1

Jadi *v* kombinasi linear dri *u*, *s*, dan *w* dengan $v = -2u + s + w$

Sistem Pembentuk

Himpunan vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ disebut sistem pembentuk dari ruang vektor V; ditulis $V = L\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ jika *<u>semua vektor</u>* $v \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Contoh :

Andaikan V = R^2, dengan $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dapat ditunjukkan bahwa u_1, u_2, dan u_3 tersebut adalah sistem pembentuk bagi R^2; sebab semua $v \in V$ dapat dinyatakan sbg kombinasi linear dari u_1, u_2 dan u_3.

Misalnya $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 2u_1 - u_2 - 3u_3$

Misalnya $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = -3u_1 + u_2 + 2u_3$; dsb.

Contoh :

Andaikan V = R^3, dengan $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dapat ditunjukkan bahwa u_1, u_2, dan u_3 tersebut adalah sistem pembentuk bagi R^3; sebab semua $v \in V$ dapat dinyatakan sbg kombinasi linear dari u_1, u_2 dan u_3.

Misalnya $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v = u_1 - u_2 + 2u_3$

Misalnya $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 3u_1 + 2u_2 + u_3$; dsb.

Ruang Baris & Ruang Kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ruang Baris} = R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Ruang Kolom} = R^m = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$$

Latihan

Bergantung Linear (linearly dependence) dan Bebas Linear (Linearly Independence).

- Andaikan ruang vektor V melalui field F. Vektor-vektor $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in V$ disebut <u>bergantung linear</u> atau <u>dependen</u> jika ada skalar $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in F$ yang <u>*tidak*</u> <u>*semuanya*</u> <u>*nol*</u> sedemikian hingga berlaku :

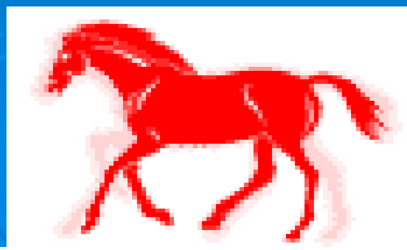
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0$$

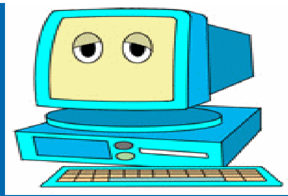
- Dari hubungan

  $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0$

  jika hanya berlaku untuk semua skalar

  $a_i = 0$ ($a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$), maka vektor-vektor $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in V$ disebut bebas linear atau independen.





- Vektor u, v, w $\in R^3$, dng :

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } w = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Selidiki vektor-vektor tsb dependen atau independen ?.

- Solusi :

$x\,u + y\,v + z\,w = 0$

$-x + 3y + 5z = 0$

$2x - 2y - 6z = 0$

$x + y - z = 0$

Diperoleh nilai :

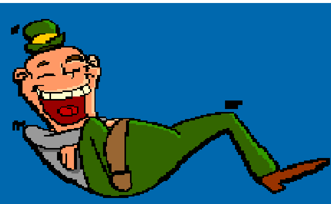
$x = -2$, $y = 1$, dan $z = -1$

Jadi :

$-2u + v - w = 0$

Karena ada skalar yang tidak nol, maka vektor-vektor u, v, dan w adalah dependen atau bergantung linear.

- Solusi : (dng menggunakan matriks)



$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\3 & -2 & 1\\5 & -6 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v+3u\\w+5u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & 4 & 4\\0 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v+3u\\(w+5u)-(v+3u)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & 4 & 4\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Telah menjadi matriks eselon,
Baris terakhir dapat dibaca :
(w + 5u) – (v + 3u) = 0
atau :
2u – v + w = 0
Karena ada skalar yang tidak nol, maka vektor-vektor u, v, dan w adalah dependen atau bergantung linear.

Amati bahwa matriks eselon punya **<u>baris nol</u>**.

- Vektor u, v, w $\in R^3$, dng :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dan } w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Selidiki vektor-vektor tsb dependen atau independen ?.

- Solusi :

$x\,u + y\,v + z\,w = 0$

$x + 2y – z = 0$

$-2x + 2y + z = 0$

$x – y – z = 0$

Hanya diperoleh nilai :
$x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$
Jadi :

$0u + 0v + 0w = 0$

Karena hanya ada skalar nol, maka vektor-vektor u, v, dan w adalah independen atau bebas linear.

➢ Solusi : (dng menggunakan matriks)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v-2u \\ w+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v-2u \\ (w+u)+\frac{1}{6}(v-2u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Telah menjadi matriks eselon, Tetapi tidak mempunyai baris nol. Karenanya vektor-vektor u, v, dan w adalah independen atau bebas linear.

Amati bahwa matriks eselon **tidak punya baris nol**.

Teorema

- Baris-baris yg tidak nol dari matriks eselon adalah bebas linear (Independen)

Teorema

- Vektor-vektor $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in V$ disebut bergantung linear (dependen) jika salah satu vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan sbg kombinasi linear dari vektor-vektor yang lainnya.

Catatan :

- jika u = 0, maka u pasti dependen.
- Jika u $\neq$ 0, maka u pasti independen.
- Himpunan vektor yang memuat vektor nol pasti dependen.
- Himpunan vektor yang memuat dua vektor yang sama atau dua vektor yang berkelipatan, pasti dependen.
- Andaikan U $\subset$ V. jika U dependen, maka V juga dependen.
- Andaikan W $\subset$ V. Jika V independen, maka W juga independen.
- Secara geometris, dua vektor yg dependen terletak pd garis (bidang) yang sama.