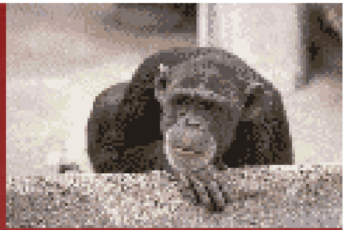
BASIS DAN DIMENSI

Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

<u>Basis dan Dimensi</u>

- Ruang vektor V dikatakan mempunyai dimensi terhingga n (ditulis dim V = n) jika ada vektor-vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ yg bebas linear. Himpunan $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ disebut <u>basis</u> dari V; dan <u>banyaknya maksimum</u> vektor yang bebas linear adalah n.



- Andaikan $V = \{u_1, u_2, u_3\}$, dengan

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{dan } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  amati bahwa himpunan $\{u_1, u_2, u_3\}$ adalah <u>bergantung linear</u>; karenanya <u>tidak bisa menjadi basis</u> untuk V.
- Tetapi misalnya himpunan $\{u_1, u_2\}$ adalah **bebas linear**. Jadi $\{u_1, u_2\}$ adalah **basis** untuk ruang V. Karenanya **dim V = 2**.
- Demikian halnya $\{u_2, u_3\}$ juga **bebas linear**, oleh karena itu ia juga **basis** dari V, dan dim V = 2.
- Contoh tersebut menunjukkan bahwa basis suatu ruang vektor tidak tunggal.

- Andaikan ruang V = {u, v, w, s}, di mana :

  u =, $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ v = $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, w = $\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, dan s = $\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}$.

  cari basis dan dimensi dari ruang V !
- Solusi : (menggunakan matriks)

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -2 & 2\\-2 & 1 & 5\\-2 & 0 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & -1 & 3\\0 & -1 & 3\\0 & -2 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & -1 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

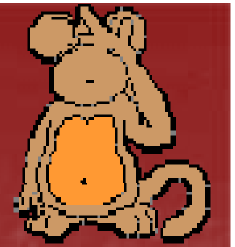
Basis dari V = {$(-1, 1, 1)^T$, $(0, -1, 3)^T$}.

Dim V = 2.

Cari basis dan dimensi dari Ruang $V = \{u, v, w\}$; jika

$$1.\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$2.\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



- Untuk R^n; dengan

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

adalah basis dari R^n, dan dim $R^n = n$. Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ disebut <u>basis natural</u> atau <u>basis standard</u>.

- Jadi basis natural dari R^2 adalah $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dim $R^2 = 2$.

Teorema

- Himpunan $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ yang bebas linear dari ruang vektor V berdimensi n adalah sistem pembentuk bagi ruang vektor V.

Catatan :

- setiap sistem pembentuk yang bebas linear adalah basis dari suatu ruang vektor.
- setiap himpunan $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ yang bebas linear adalah basis dari ruang vektor berdimensi n.

- Contoh :

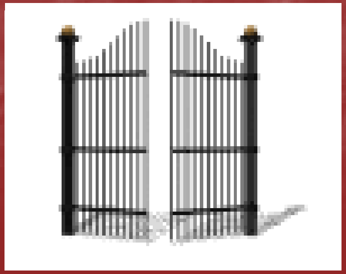
  u, v, w $\in$ R^2, dng u = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, w = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  dapat diselidiki bahwa {u, v, w} adalah bergantung linear; ia juga sistem pembentuk R^2. Tetapi {u, v, w} tidak bisa menjadi basis R^2.

  sedangkan {u, w} adalah **bebas linear**, ia juga sistem pembentuk bagi R^2. Jadi himpunan {u, w} adalah **basis** untuk R^2 tersebut.

Teorema

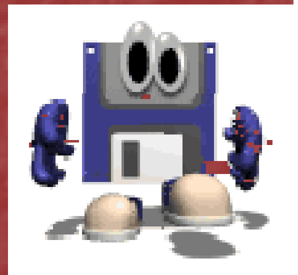
- Jika ruang vektor V berdimensi n, maka setiap himpunan yang memuat n+1 anggota atau lebih adalah bergantung linear (dependen).



- Contoh :

  u, v, w $\in$ R^2, dng u = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, w = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  dapat diselidiki bahwa {u, v, w} pasti bergantung linear; mengapa ?.



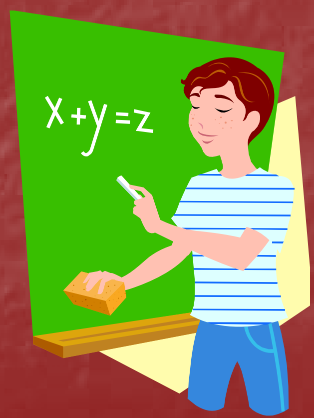
- V = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

  Bebas linear atau bergantung linear ?

Ruang Jumlah

- Jika U dan W adalah subspace dari V, ruang jumlah dari U dan W adalah

  $U + W = \{u+w \mid u \in U \text{ dan } w \in W\}$.



Contoh :

Andaikan U dan W subspace $V = R^4$ dengan :

$$U = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a + b - c = 0;\ a,b,c,d \in R \}$$

$$W = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a - d = 0,\ b + 2c = 0;\ a,b,c,d \in R \}.$$

Cari basis dan dimensi dari :

(a) U, (b) W, (c) $U \cap W$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan } W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cari basis dan dimensi dari (a) U+W,

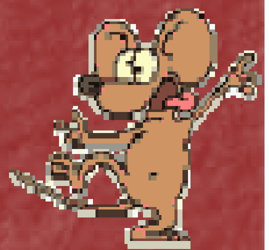
Solusi :

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Untuk mencari basis U + W dikerjakan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

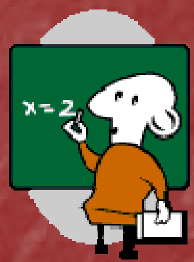


Basis U+W $=\{(1,-1,2,1)^T,(0,-1,5,4)^T,(0,0,1,2)^T,(0,0,0,1)^T\}$

Dim U+W = 4.

Teorema

- Jika U dan W subspace dari V, maka U+W adalah juga subspace dari V.



Amati bahwa :

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$$

Ruang Jumlah Langsung

- U dan W subspace V. Ruang V adalah jumlah langsung (*direct sum*) dari U dan W, ditulis $U \oplus W$, jika setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan dalam **satu cara dan hanya satu cara** sebagai $v = u + w$; di mana $u \in U$ dan $w \in W$.

- Andaikan U dan W subspace V, di mana

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ adalah <u>jumlah langsung</u> dari U dan W

Sebab misalnya : $$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Andaikan U dan W subspace V, di mana

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad W = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ maka } V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

adalah <u>bukan jumlah langsung</u> dari U dan W

Sebab misalnya : $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ atau

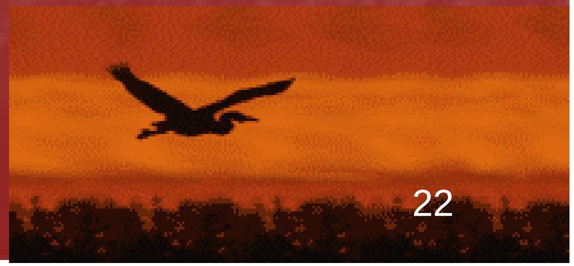
$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ dsb.

Teorema

- Ruang vektor V dikatakan jumlah langsung dari subspace U dan W jika dan hanya jika

  (1) $U + W = V$, dan

  (2) $U \cap W = \{ 0 \}$.



Ruang Baris dan Ruang Kolom

- Untuk matriks $\mathbf{A}_{mxn}$, maka ***dimensi dari ruang baris*** = ***dimensi ruang kolom***.

- Berapa dimensi ruang baris dari :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{H}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ada <u>dua baris tidak nol</u>, berarti dimensi = 2.

- Berapa dimensi ruang kolom dari :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{K}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ada <u>dua kolom tidak nol</u>, berarti dimensi = 2.


THANK YOU!