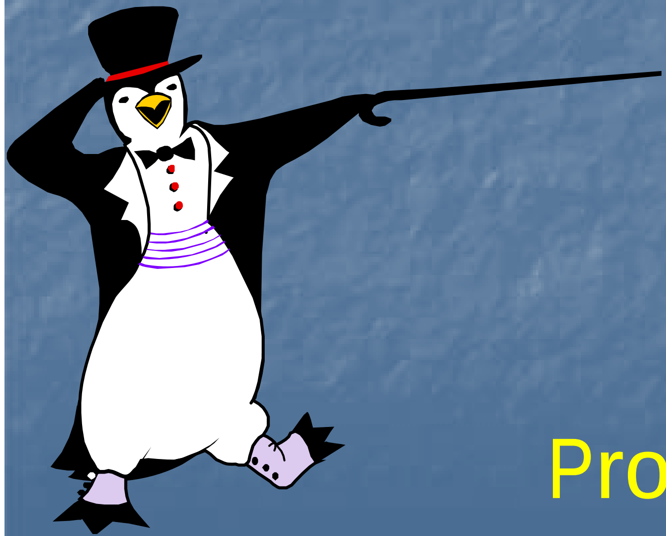
PERUBAHAN BASIS
&
TRANSFORMASI LINEAR



Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Pergantian Basis
(Change of Basis)

- Andai (e_i) basis natural dari R^n. Sembarang $u \in R^n$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis (e_i); katakanlah :

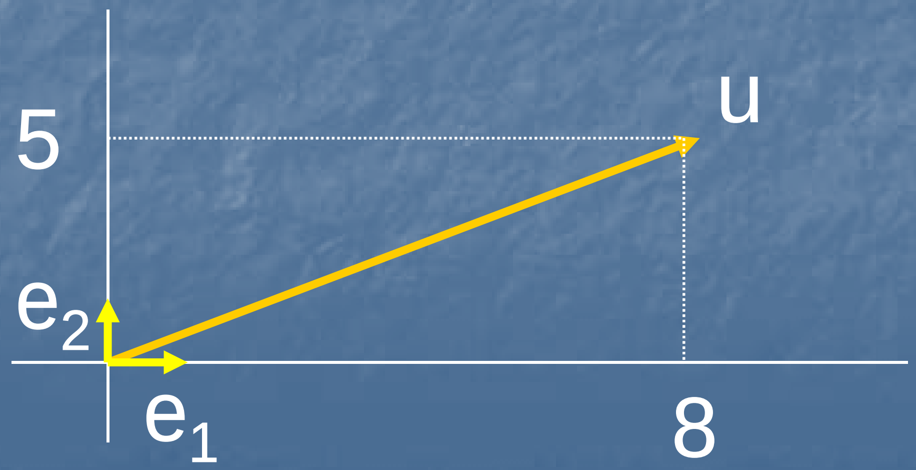
  $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \ldots + a_n e_n$.

  Pasangan skalar $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ disebut <u>koordinat relatif</u> dari u terhadap basis (e_i); ditulis $u_e = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

- Contoh :

  $u \in R^2$; dengan $u = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, terhadap basis natural (e_i) dng $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

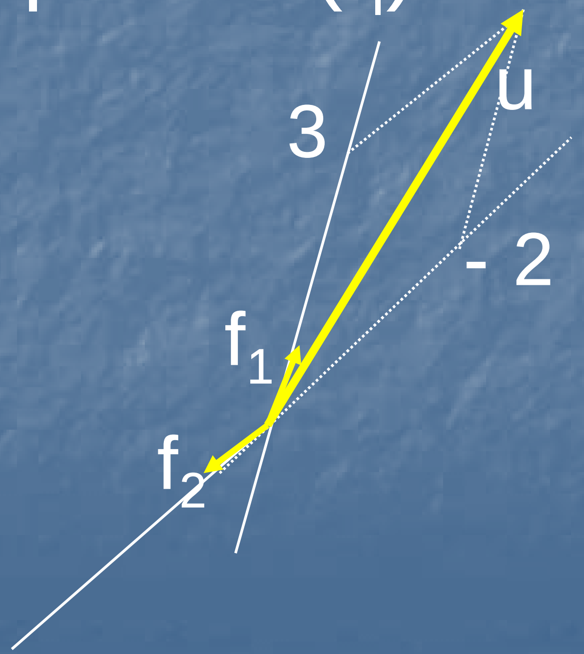
  maka $u = 8\ e_1 + 5\ e_2$. Jadi koordinat relatif u terhadap basis natural (e_i) adalah $u_e = (8,5)$.



- Andaikan basis lain dari R^2 adalah basis

(f_i) dng $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

adalah $u = 3\ f_1 - 2\ f_2$. Jadi koordinat relatif u terhadap basis (f_i) adalah $u_f = (3,-2)$.



- $u \in R^3$, dng $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

  Basis lain dari ruang R^3 adalah (g_i) dengan

  $g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $g_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cari

  koordinat relatif u terhadap basis (g_i).

  Solusi :

  $u = x\, g_1 + y\, g_2 + z\, g_3$

- Diperoleh persamaan :

  $-x + y + 2z = 0$

  $x + z = 5$

  $-x + y - z = -6$

  Diperoleh nilai-nilai $x = 3$, $y = -1$, dan $z = 2$

Jadi koordinat relatif u terhadap basis (g_i) adalah $u_g = (3, -1, 2)$.

Matriks Transisi

- Karena (e_i) basis natural, maka setiap (f_i) dapat dinyatakan sbg kombinasi linear dari basis (e_i); misalnya :

  $f_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3 + \dots + a_{n1} e_n$

  $f_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + a_{32} e_3 + \dots + a_{n2} e_n$

  $f_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3 + \dots + a_{n3} e_n$

  ....

  $f_n = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + a_{3n} e_3 + \dots + a_{nn} e_n$

- $(f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \;\; \ldots \; f_n) = (e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \;\; \ldots \; e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

  $(f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \;\; \ldots \; f_n) = (e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \;\; \ldots \; e_n)\, P$

  $(f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \;\; \ldots \; f_n) = P$

- P disebut **matriks transisi** dari basis (e_i) ke basis (f_i).

Teorema :

- Jika $u \in R^n$ mempunyai koordinat relatif $(x_1, x_2, ..., x_n)$ terhadap basis (e_i) dan mempunyai koordinat relatif $(y_1, y_2, ..., y_n)$ thd basis (f_i), maka berlaku hubungan :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Contoh

- vektor u terhadap basis (e_i) mempunyai koordinat relatif (5,8). Berapa koordinat relatif u terhadap basis (f_i), jika

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

solusi

- Matriks transisi

$$P = (f_1 \quad f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jadi $u_f = (3, -2)$.

Transformasi Linear

- 

- T : $R^n \rightarrow R^m$ disebut transformasi linear jika memenuhi :

  (1) $T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)$

  (2) Utk skalar $k \in F$, berlaku $k\,T(u_1) = T(ku_1)$

Contoh

- T : $R^3 \rightarrow R^2$ dng rumus transformasinya

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) cari peta dari vektor u = $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan v = $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(b) Apakah transformasi T di atas transformasi linear ?

solusi

(a) $u' = T(u) = T\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v' = T(v) = T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \longrightarrow T(u+v) = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$

$T(u) + T(v) = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$

mis. $k = 2 \rightarrow ku = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow T(ku) = k\,T(u)$

Jadi T merupakan trnasformasi linear.

T : $R^2 \rightarrow R^3$ dng rumus transformasinya

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Apakah transformasi T di atas transformasi linear ?

- T transformasi linear, pasti T(0) = 0. (perhatikan syarat (2)).