

Matriks Transformasi Linear Ruang Peta Ruang Nol



Prof.Dr. Budi Murdiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Matriks Transformasi Linear

- Pada transformasi linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, misalnya (e_i) basis natural dari \mathbb{R}^n ; dan (π_i) basis natural dari \mathbb{R}^m .



- Setiap $T(e_i)$ pasti dpt dinyatakan sbg kombinasi linear dari basis natural (π_i) di \mathbb{R}^m .

$$T(e_1) = a_{11} \pi_1 + a_{21} \pi_2 + a_{31} \pi_3 + \dots + a_{m1} \pi_m$$

$$T(e_2) = a_{12} \pi_1 + a_{22} \pi_2 + a_{32} \pi_3 + \dots + a_{m2} \pi_m$$

$$T(e_3) = a_{13} \pi_1 + a_{23} \pi_2 + a_{33} \pi_3 + \dots + a_{m3} \pi_m$$

.....

$$T(e_n) = a_{1n} \pi_1 + a_{2n} \pi_2 + a_{3n} \pi_3 + \dots + a_{mn} \pi_m$$

$$[T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3) \ \dots \ T(e_n)] = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \dots \ \pi_m] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3) \ \dots \ T(e_n)] = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \dots \ \pi_m] T$$

$$[T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3) \ \dots \ T(e_n)] = T$$

- T disebut matriks transformasi dari $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Perhatikan bahwa kolom-kolom dari T adalah peta dari basis natural \mathbb{R}^n oleh transformasi T.

Contoh :

Transformasi $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan rumus

$$\text{transformasinya } T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$$

Carilah :

a) matriks transformasi T

b) peta dari $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Teorema

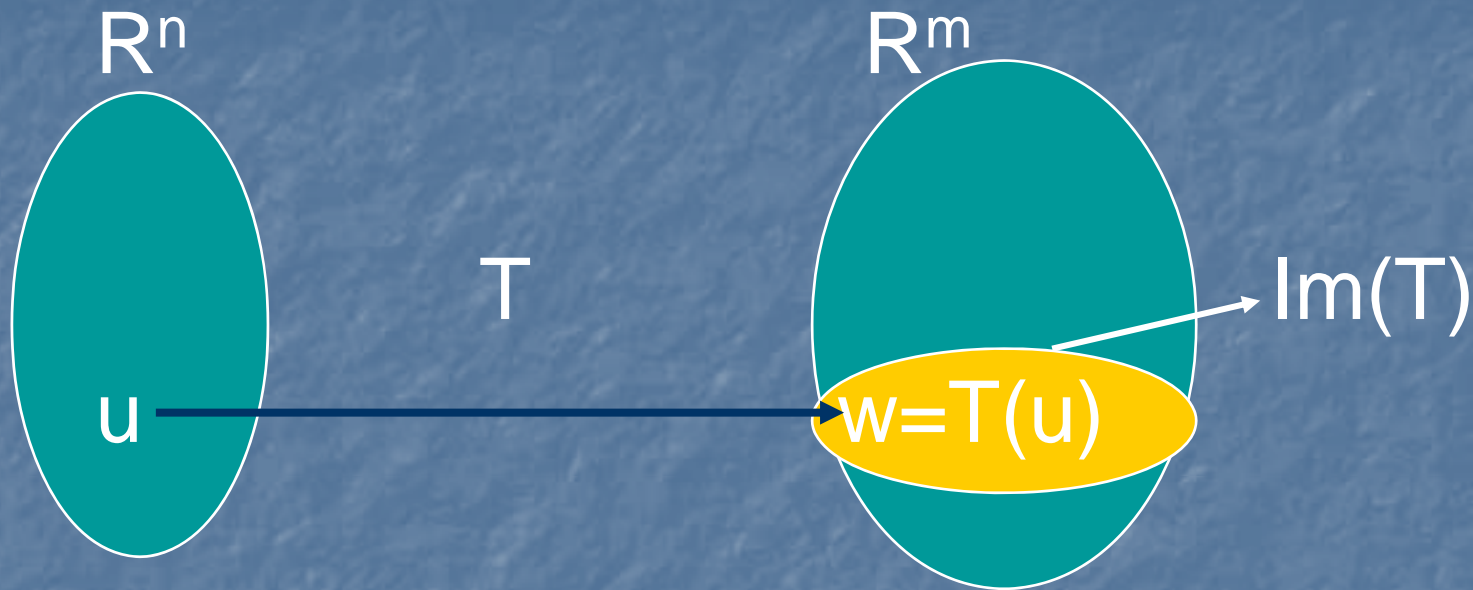
- Jika $u \in \mathbb{R}^n$, dan $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; maka untuk $w \in \mathbb{R}^m$ yang merupakan peta dari u adalah $w = T \cdot u$

- Andaikan $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yg memetakan vektor-vektor di \mathbb{R}^3 ke \mathbb{R}^2 sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \text{ dan } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Carilah rumus transformasi untuk T ,
kemudian cari peta dari $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ruang Peta (Image Space)



- Himp. vektor peta membentuk ruang vektor yg merupakan subspace dari R^m , yg disebut ruang peta ditulis $\text{Im}(T)$.

Ruang Peta

- $\text{Im}(T) = \{w \mid w = T(u); u \in \mathbb{R}^n, \text{ dan } w \in \mathbb{R}^m\}$.
- Teorema :
Pada $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ruang peta $\text{Im}(T)$ adalah subspace \mathbb{R}^m .

Basis dan dimensi ruang peta

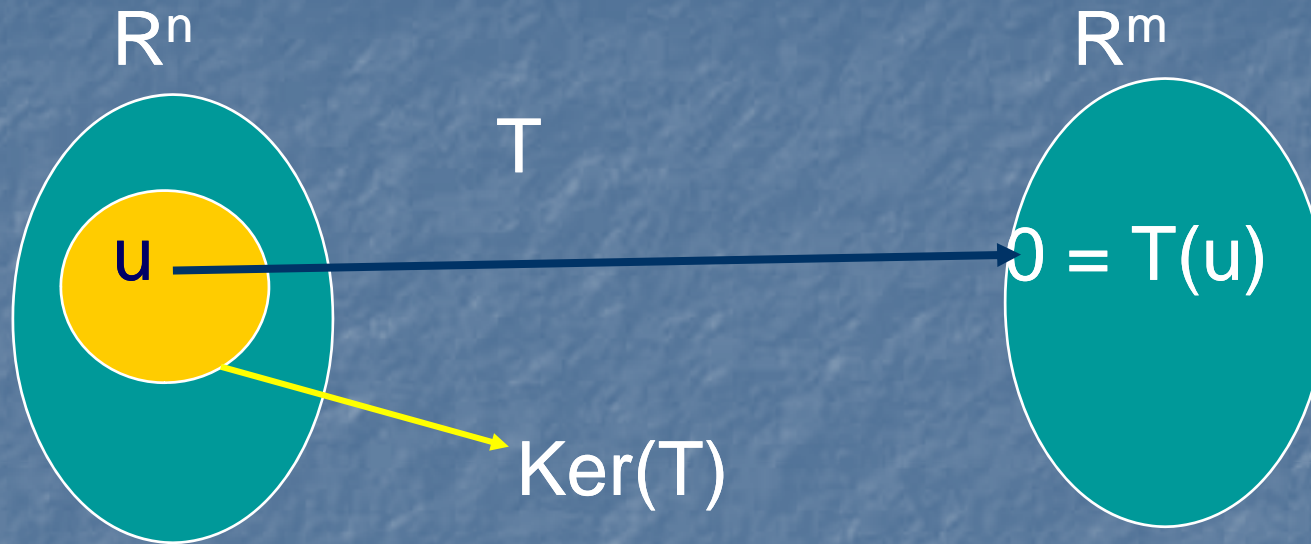
- Karena kolom-kolom dari matriks transformasi T berisi peta-peta dari basis natural (e_i) , maka untuk mencari basis dan dimensi dari ruang peta $\text{Im}(T)$ dapat mencarinya melalui matriks T dengan melakukan operasi kolom elementer (OKE) terhadap T .

Contoh

- Cari basis & dimensi dr ruang peta $\text{Im}(T)$ jika $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan rumus

$$\text{transformasi } T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$$

Ruang Nol (Null Space / Kernel)



- Pada $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dimungkinkan beberapa vektor $u \in \mathbb{R}^n$ oleh transformasi T mempunyai peta vektor nol (0), yaitu $T(u) = 0$; dengan $0 \in \mathbb{R}^m$. Himp.vektor u yg mempunyai peta vektor nol ini membentuk ruang vektor yg dinamakan ruang nol yg ditulis dng $\text{Ker}(T)$.

Ruang Nol

- $\text{Ker}(T) = \{u \mid T(u) = 0 ; u \in \mathbb{R}^n \text{ dan } 0 \in \mathbb{R}^m\}$.
- Teorema :
Pada $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ruang nol $\text{Ker}(T)$ adalah subspace \mathbb{R}^n .

Basis dan dimensi ruang nol

- Mencari basis dan dimensi dari ruang nol pada dasarnya mencari vektor u sedemikian hingga $T(u) = 0$. Jadi di sini sama saja mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear homogen untuk mendapatkan vektor u .

Contoh

- Cari basis & dimensi dr ruang nol $\text{Ker}(T)$ jika $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan rumus

transformasi $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$

- Catatan :

Pada $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\dim \text{Im}(T) + \dim \text{Ker}(T) = n.$$