Inner Product / dot product

- Hasil kali dalam / hasil kali titik
- Ortonormalisasi Basis: Proses Gram-Schmidt
- Transformasi Ortogonal

Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Dot product

- u, v $\in R^n$, dengan u = $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ dan v = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$.

  Hasil kali dalam dari u dan v adalah :

  $u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$
- Hasil dari *inner product* adalah berupa skalar.

- dalam notasi matriks dapat ditunjukkan bahwa :

  $\mathbf{u.v = u^t v = v^t u}$

Teorema

- Jika u, v, w $\in R^n$, dan k adalah skalar dari field bil real, maka :

  (1) u.v = v.u

  (2) (u + v).w = u.w + v.w

  (3) (ku).v = k (u.v)

  (4) u.u > 0

Teorema : untuk u, v $\in R^n$:

- u orthogonal (tegak lurus) v jika dan hanya jika **u.v = 0**

- panjang u, $||u|| = \sqrt{(u.u)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$

- jarak antara u & v,

  $$d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

- sudut antara u dan v : $\cos \alpha = \dfrac{u.v}{\|u\| \; \|v\|}$

Beberapa Catatan :

- vektor unit : vektor yang mempunyai panjang (norm) sama dengan 1
- suatu vektor yang panjangnya tidak satu dapat dinormalisir sehingga panjangnya menjadi 1; misal untuk vektor u, vektor unit dari u adalah :
  g = $\dfrac{u}{\|u\|}$.
- Basis ruang vektor di mana semua vektor-vektor basisnya saling ortogonal disebut <u>basis ortogonal</u>.
- Basis ortogonal yang vektor basisnya masing-masing panjangnya satu disebut <u>basis ortonormal</u>. Contoh : basis natural merupakan basis ortonormal.

Contoh

- Andaikan u = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan w = $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Carilah :

  a). vektor-vektor manakah yang saling ortogonal ?

  b). carilah panjang dari u, v, dan w

  c). carilah jarak antara u dan w

  d) carilah sudut antara u dan w

Solusi

a). vektor-vektor manakah yang saling ortogonal ?

$u.v = (1)(1) + (1)(-2) + (1)(1) = 0$

$u.w = (1)(-1) + (1)(1) + (1)(0) = 0$

$v.w = -3$

Jadi u dan v ortogonal; u dan w ortogonal

b). carilah panjang dari u, v, dan w

$||u|| = V(1^2 + 1^2 + 1^2) = V\ 3$

$||v|| = V\ 6$

$||w|| = V\ 2$

solusi

c). carilah panjang antara u dan w

d(u,w) = V 5

d) carilah sudut antara u dan w

cos A = $\dfrac{u.w}{\|u\|.\|w\|}$ = 0 / (V6) =0

A = arc cos (0) = 90^{o}

Transformasi basis

- Sembarang basis dapat dilakukan transformasi sehingga menjadi basis ortogonal / basis ortonormal.

Ortonormalisasi Basis : Proses Gram Schmidt

Andaikan Basis lain dari V = $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$

1. $Y_1 = X_1$
2. $Y_2 = X_2 + aY_1 \rightarrow Y_2 = X_2 - \frac{X_2 . Y_1}{Y_1 . Y_1} Y_1$
3. $Y_3 = X_3 + bY_2 + cY_1$

$\rightarrow Y_3 = X_3 - \frac{X3.Y2}{Y2.Y2} Y_2 - \frac{X3.Y1}{Y1.Y1} Y_1$

4. $Y_4 = X_4 - \frac{X4.Y3}{Y3.Y3} Y_3 - \frac{X4.Y2}{Y2.Y2} Y_2 - \frac{X4.Y1}{Y1.Y1} Y_1$

Dan seterusnya.

Basis ortogonal dari V : $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$

y2.ppt

- Untuk menemukan basis ortonormal, dari vektor basis ortogonal tersebut dinormalisir, yaitu :

$$g_1 = \frac{Y1}{\|Y1\|},\ g_2 = \frac{Y2}{\|Y2\|},\ g_3 = \frac{Y3}{\|Y3\|},\ g_4 = \frac{Y4}{\|Y4\|}\ , \ldots$$

dan seterusnya.

- Basis ortonormal dari V : $\{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$.

Contoh

- cari basis ortonormal dari

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matriks Ortogonal

- A matriks ortogonal ←→ $A^T A = A A^T = I$
- Ini berarti bahwa A matriks ortogonal maka :

1) $A^T = A^{-1}$
2) det(A) = 1 atau –1
3) hasil kali dua matriks ortogonal juga matriks ortogonal
4) invers dari matriks ortogonal juga matriks ortogonal
5) transpose matriks ortogonal juga matriks ortogonal
6) Basis ortonormal dari suatu R^n dapat disusun dalam baris-baris (kolom-kolom) satu matriks A_{nxn} sedemikianhingga A merupakan matriks ortogonal.

Transformasi Ortogonal

- Tranformasi Y = AX disebut transformasi ortogonal jika A merupakan matriks ortogonal.
- Pada transformasi Ortogonal, panjang vektor asal sama dengan panjang vektor peta.

Contoh

- Jika matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

  Pada transformasi Y = AX, carilah :

  a) Apakah transformasi tersebut transformasi Ortogonal ?

  b) panjang X, jika $X = [2 \quad 1 \quad -2]^T$

  c) peta dari X, yaitu Y.

  d) panjang dari Y

Contoh

- Matriks transformasi A = $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

  Apakah A matriks ortogonal jika :

  a) $\alpha = 90^o$?

  b) $\alpha = 45^o$?.