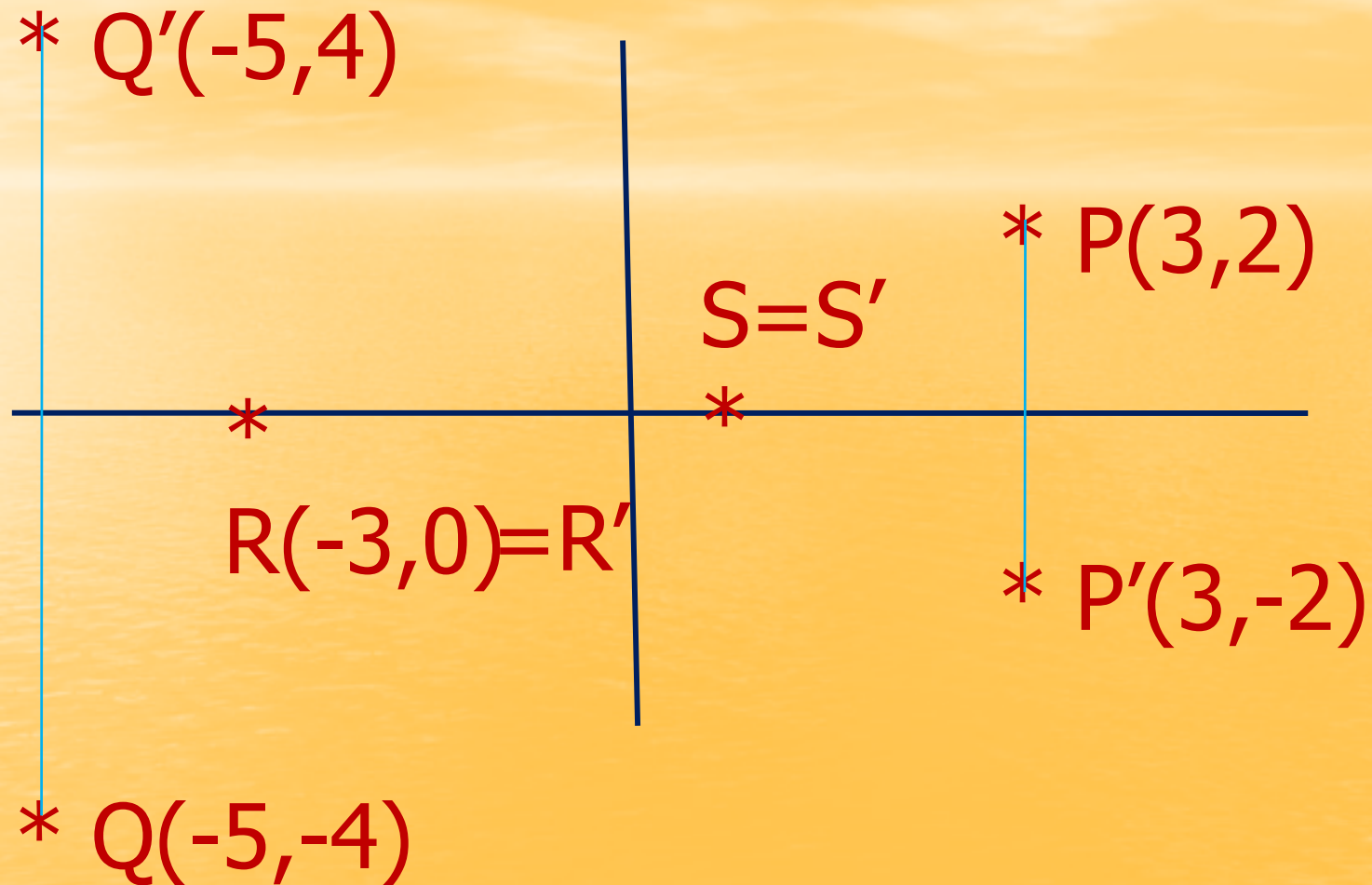


AKAR DAN VEKTOR KARAKTERISTIK

- Titik / garis Invarian
- eigen value dan eigen vector

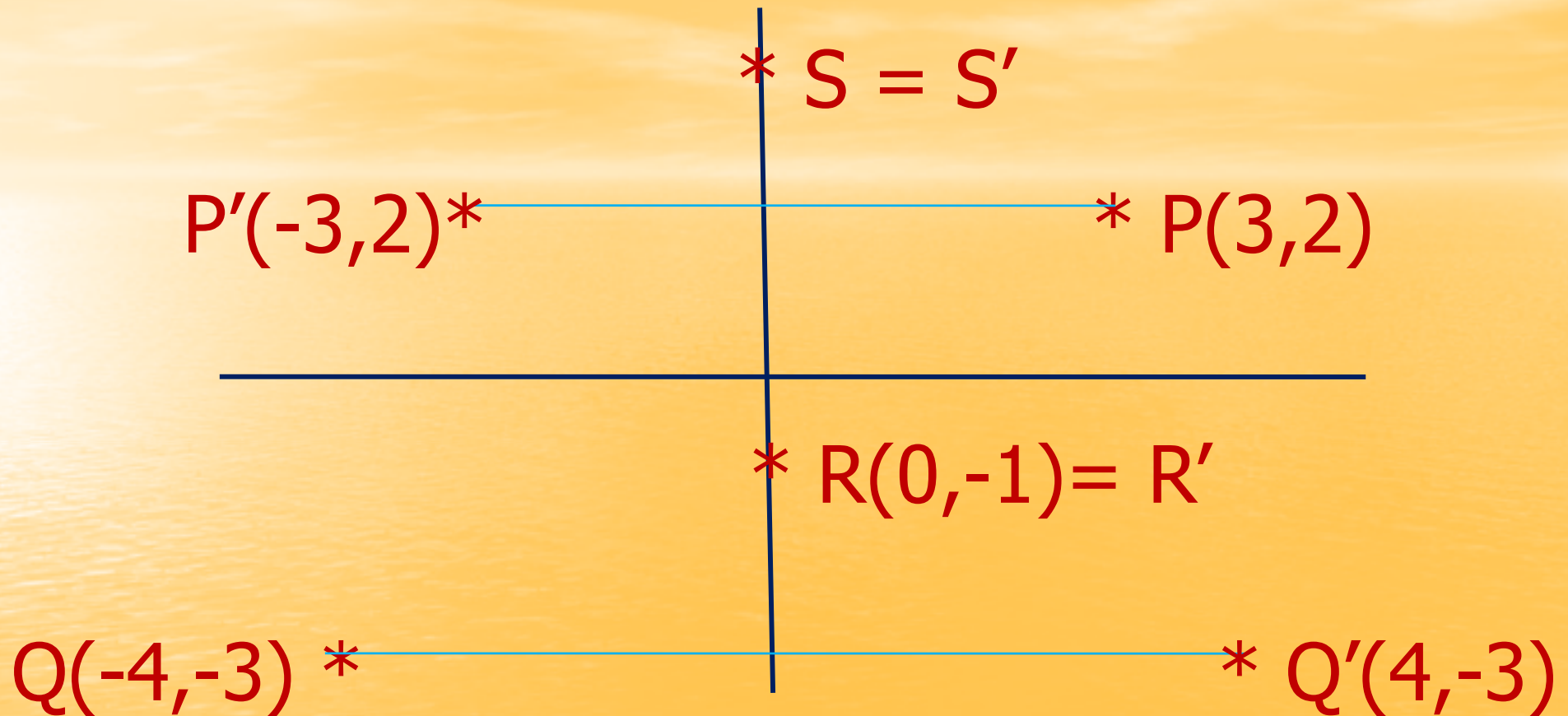
Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Transformasi Pencerminan Thd Sb X



R tdk berubah, disebut titik tetap/titik invarian.
Semua titik pd sb X menjadi titik invarian

Transformasi Pencerminan Thd Sb Y



R tdk berubah, disebut titik tetap/titik invarian.
Semua titik pd sb Y menjadi titik invarian

Perhatikan bahwa pada suatu transformasi, dimungkinkan ada titik atau garis yang tidak berubah oleh transformasi. Titik atau garis yang tidak berubah pada suatu transformasi disebut titik invarian atau garis invarian.

Akar dan Vektor Karakteristik

- Andaikan $X, Y \in \mathbb{R}^n$ dan $A_{n \times n}$ adalah matriks transformasi.

Secara umum berlaku hubungan $Y=AX$, artinya oleh matrik A , vektor X dipetakan menjadi vektor baru Y .

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan vektor } X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = Y$$

Dalam kasus khusus dimungkinkan vektor \mathbf{X} dipetakan ke vektor \mathbf{X} juga (atau kelipatannya), jadi : $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$, dengan λ adalah skalar anggota field F . Dalam kasus seperti ini \mathbf{X} dinamakan vektor invarian (vektor tetap / vektor karakteristik).

$$\text{Misal } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan vektor } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

Bagaimanakah
mendapatkan
vektor invarian X ,
sehingga :

$$AX = \lambda X$$

- $AX = \lambda X$ (1)

$$AX - \lambda X = 0$$

$$AX - \lambda IX = 0$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$
 (2)

- sistem (2) akan mempunyai penyelesaian X yang nontrivial (tidak nol) jika :

$$|A - \lambda I| = 0$$
 (3)

- ekspansi persamaan (3) akan diperoleh polinomial dalam λ , atau $P(\lambda)$ yang disebut polinom karakteristik; jadi polinom karakteristik $P(\lambda) = |A - \lambda I|$

- Karena A dan I diketahui, dari persamaan (3) dengan $P(\lambda) = 0$, akan diperoleh nilai-nilai λ yang disebut dengan akar karakteristik (nilai eigen).
- Selanjutnya jika λ diperoleh, disubstitusikan kembali ke persamaan (2) akan ditemukan vektor invarian (vektor karakteristik) X .

Contoh

- Andai matriks transformasi $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Carilah akar dan vektor karakteristik dari transformasi tersebut !

Solusi :

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \{(-1 - \lambda)(4 - \lambda)\} - (2)(3)$$

$$|B - \lambda I| = (-2 - \lambda)(5 - \lambda)$$

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = 0$$

$$(-2 - \lambda)(5 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \text{ dan } \lambda_2 = 5$$

Selanjutnya mencari vektor invarian,

Untuk $\lambda = -2$, maka :

$$(B - \lambda I) X = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{H}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} n = 2 \\ r = 1; \text{ banyak var bebas} = 1 \end{array}$$

Persamaan baru :

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Var bebas : x_2

$$\text{Misal } x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -2$$

Vektornya adalah $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda = 5$, maka :

$$(B - \lambda I) X = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{H}{\sim} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} n=2 \\ r=1; \end{matrix} \text{ banyak var bebas } = 1$$

Persamaan baru :

$$-6x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Vektornya adalah } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh

- Andai matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Carilah akar dan vektor karakteristik dari transformasi tersebut !

Solusi :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$P(\lambda) = (5 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = 5$$

Selanjutnya mencari vektor invarian,

Untuk $\lambda = 1$, maka :

$$(A - \lambda I) X = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} n = 3 \\ r = 1; \text{ banyak var bebas} = 2 \end{array}$$

Persamaan baru :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

→

Variabel bebasnya :

x_2 dan x_3

Persamaan baru : $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

Misalkan:

$$x_2 = 1 \text{ dan } x_3 = 0 \rightarrow \text{maka } x_1 = -2 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0 \text{ dan } x_3 = 1 \rightarrow \text{maka } x_1 = -1 \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 5$, maka :

$$(A - \lambda I) X = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n = 3 ; r = 2;$$

banyak var bebas = 1 \rightarrow

Persamaan baru :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$-4x_2 + 4x_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Persamaan baru : } x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Variabel bebas x_3 ;

Misalkan: $x_3 = 1 \rightarrow$ maka $x_2 = 1$ dan $x_1 = 1$

$$\text{Vektornya } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat :

- 1) jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ adalah akar karakteristik yang berbeda, dan masing-masing berhubungan dng vektor invarian X_1, X_2, \dots, X_k ; maka vektor-vektor invarian tersebut bebas linear.
- 2) Akar karakteristik dari A dan A^T adalah sama.