SIMILARITAS

- Similaritas
- Pendiagonalan Matriks
- Similaritas dari Matriks Simetri

Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Pengantar

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Similaritas

- Dua matriks transformasi A dan B dikatakan similar jika terdapat matriks nonsingular R sehingga $B = R^{-1}AR$
- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adalah similar}$$

sebab terdapat matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
sehingga $B = P^{-1}AP$.

Sifat :

1) dua matriks yang similar mempunyai akar karakteristik yang sama

2) jika Y adalah vektor karakteristik dari B yang berhubungan dengan akar karakteristik λ_i, maka $X = PY$ adalah vektor invarian A yang berhubungan dengan akar karakteristik λ_i.

Persoalannya sekarang adalah :
Jika diketahui dua matriks
A dan B, bagaimana mendapatkan
matriks P sehingga berlaku
$P^{-1}AP = B$?

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriks Diagonal

D = $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Akar dan vektor karakteristik dari matriks D adalah λ_1 = -3, λ_2 = 7, dan λ_3 = 9. Dengan vektor karakteristiknya bertutut-turut adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Setiap matriks diagonal berdimensi $n x n$ pasti mempunyai n vektor yang bebas linear.

Similar dengan Matriks Diagonal : Pendiagonalan Matriks

- Teorema :

  Setiap matrik A bedimensi $n \times n$ yg mempunyai n vektor yang bebas linear similar dengan matriks diagonal.

Bukti:

Andaikan X_1, X_2, X_3, …, X_n adalah vektor invarian yg berhubungan dng akar karakteristik λ_1, λ_2, λ_3, .., λ_n sehingga $AX_i = \lambda_i X_i$ (i = 1, 2, 3, …, n).

Andaikan $P = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots \ X_n]$, maka

$AP = A[X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] = [AX_1 \ AX_2 \ AX_3 \ \dots \ AX_n]$

$AP = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \lambda_3 X_3 \ \dots \ \lambda_n X_n]$

Bukti...

$$AP = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3 \ \ \ldots \ \ X_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AP = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3 \ \ \ldots \ \ X_n] \ \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, .., \lambda_n)$$

$$AP = P\,D$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\,D$$

$$P^{-1}AP = D$$

Jadi matriks A similar dengan matriks diagonal D, sebab ada matriks non singular P sehingga $P^{-1}AP = D$.

- Matriks $A_{n \times n}$ yg mempunyai n vektor invarian yg bebas linear dinamakan *diagonalisabel* (dapat didiagonalkan / similar dengan matriks diagonal).

Algoritma utk mendiagonalkan matriks Anxn :

(1) cari akar-akar karakteristik dari matriks A, yaitu λ_i (i = 1,2, 3, ..., n)

(2) cari vektor-vektor karakteristik dari A yg berhubungan dengan akar-akar karakteritik λ_i.

(3) Jika <u>banyaknya vektor invarian</u> < n, maka A tidak diagonalisabel. Selesai.

(4) Jika banyaknya vektor invarian = n, maka A diagonalisabel. Selanjutnya :

(4.1). Ambil P = [X1 X2 X3 ... Xn], dengan X adalah vektor invarian dari A.

(4.2). Cari P^{-1}

(4.3). $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, .., \lambda_n)$, dengan λ_i adalah akar-akar karakteristik dari A.

(4.4). selesai.

contoh

Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (diagonal).

contoh

Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (diagonal).

contoh

- Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?

  Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (Didagonal).

contoh

- Apakah matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?

  Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}BP = D$ (Diagonal).

Similaritas dari matriks-matriks Simetri

- Jika A matriks simetri, yaitu $A^T = A$, maka dapat ditemukan matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal).

- Teorema :

  Vektor-vektor invarian dari matriks simetri yg berasal dari akar karakteristik yg berbeda adalah saling ortogonal

bukti

Andaikan X_1 dan X_2 adalah vektor invarian yg berasal dari λ_1 dan λ_2 (dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$) dari matriks simetri A, maka :

$AX_1 = \lambda_1 X_1$

$X_2^T AX_1 = X_2^T \lambda_1 X_1$ (1)

$(X_2^T AX_1)^T = (\lambda_1 X_2^T X_1)^T$

$X_1^T A^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$

$X_1^T A X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$ (2)

bukti...

Sementara itu juga :

$AX_2 = \lambda_2 X_2$

$X_1^T AX_2 = \lambda_2 X_1^T X_2$ (3)

$(X_1^T AX_2)^T = (\lambda_2 X_1^T X_2)^T$

$X_2^T A^T X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1$

$X_2^T A X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1$ (4)

dari (2) dan (3) :

$\lambda_1 X_1^T X_2 = \lambda_2 X_1^T X_2$

$\lambda_1 X_1^T X_2 - \lambda_2 X_1^T X_2 = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0$ atau $X_1^T X_2 = 0$

Ini berarti X_1 ortogonal X_2.

Untuk matrik simetri A, algoritma untuk mendapatkan matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal) adlh

(1) cari akar karakteristik dari A

(2) cari vektor invarian dari A

(3) jika semua akar karakteristik berbeda, maka vektor invarian X1, .., Xn adalah saling ortogonal.

(3.1) normalisir vektor-vektor X1, ..., Xn sehingga menjadi Y1, Y2,..., Yn.

(3.2) Matriks ortogonal R = [Y1 Y2 ... Yn].

(3.3) $R^{-1}AR = D$ (diagonal). Selesai.

(4) **Jika ada akar karakteristik yg sama**, misalnya $\lambda_1 = \lambda_2$, maka X1 dan X2 belum ortogonal; sedangkan X3, ..., Xn sudah ortogonal.

(4.1) lakukan proses Gram-Schmidt thd X1 dan X2 sehingga menjadi W1 dan W2 yang saling ortogonal.

(4.2) Ambil W3 = X3, ..., Wn = Xn

(4.3) Normalisir vektor-vektor W1, W2, W3, ..., Wn sehingga menjadi Y1, Y2, Y3, .., Yn.

(4.4) Matriks ortogonal R = [Y1 Y2 ... Yn].

(4.5) $R^{-1}AR = D$ (diagonal). Selesai.

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}BR = D$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}CR = D$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}FR = D$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}BR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}CR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}ER = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1} FR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}GR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1} HR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}KR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$K = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1} LR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$L = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$