

## Latihan 2 : Ruang Vektor dan Ruang Vektor Bagian

1. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . dengan operasi penjumlahan pada himpunan  $V$  di definisikan :  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$  dan operasi perkalian pada  $V$  didefinisikan:  $k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \end{pmatrix}$ . Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?

2. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . dengan operasi penjumlahan pada  $V$  di definisikan :  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ b_1 + 2b_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$  dan operasi perkalian pada  $V$  didefinisikan :  $k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ kc_1 \end{pmatrix}$ . Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?

3. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . dengan operasi penjumlahan pada  $V$  di definisikan :  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$  dan operasi perkalian pada  $V$  didefinisikan :  $k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ 0 \\ kc_1 \end{pmatrix}$ . Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?

4. Andaikan  $M = \{\text{semua matriks berdimensi } 2 \times 3\}$ . Operasi penjumlahan pada  $M$  adalah operasi penjumlahan matriks. Operasi perkalian pada  $M$  adalah operasi perkalian skalar. Apakah  $M$  merupakan ruang vektor ?

5. Himpuna semua polinom berderajat dua  $P = \{ a + bt + ct^2; \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R} \}$ . Operasi penjumlahan pada  $P$  adalah penjumlahan polinom, dan operasi perkalian pada  $P$  adalah perkalian skalar. Selidiki apakah  $P$  merupakan ruang vektor ?

6. Diketahui sembarang field  $F$  dan  $X$  adalah himpunan yang tidak kosong. Pandanglah  $V$  sebuah fungsi dari  $X$  into  $F$ . Jumlah dua fungsi  $f, g \in V$  adalah sebuah fungsi  $f + g \in V$

yang didefinisikan  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ , dan Perkalian skalar  $k \in F$  dengan fungsi  $f \in V$  adalah fungsi  $kf \in V$  yg didefinisikan  $(kf)(x) = kf(x)$ . Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor atas field  $F$  ?

7. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . Operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar di

dalam  $V$  berturut-turut didefinisikan dengan :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \text{ dan } k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ 1 \\ kc_1 \end{pmatrix}$$

Di bawah operasi tersebut, selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?. Jelaskan jawab saudara !

8. Diketahui  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \text{Real} \right\}$ . Operasi penjumlahan pada  $V$  didefinisikan ;  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$ , sedangkan operasi perkalian pada  $V$  didefinisikan  $k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?

9. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar di

dalam  $V$  berturut-turut didefinisikan dengan :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 3a_2 \\ b_1 + 3b_2 \end{pmatrix} \text{ dan } k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

Di bawah operasi tersebut, selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor ?. Jelaskan jawab saudara !

10. Let  $V$  be the set of all pairs  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  of real numbers. Define :  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$  and for any scalar  $k$ ,  $k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ . Is  $V$  a vector space with these operations ?

11. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \text{Real} \right\}$ . Jika operasi penjumlahan dan perkalian di dalam  $V$  berturut-turut didefinisikan dengan  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}$  dan  $k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$ . Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor? Jelaskan jawab saudara!

12. Andaikan  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . dengan operasi penjumlahan pada  $V$  di definisikan :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \text{ dan operasi perkalian pada } V \text{ didefinisikan : } k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ kc_1 \end{pmatrix}.$$

Selidiki apakah  $V$  merupakan ruang vektor?

13. Selidiki apakah  $W$  merupakan *subspaces* dari  $V = \mathbb{R}^3$ , jika :

a)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

b)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid xyz = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

14. Let  $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y - z = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$  and  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + 3y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ .

- a) Is  $U$  a subspace of  $\mathbb{R}^3$ ?
- b) Is  $W$  a subspace of  $\mathbb{R}^3$ ?
- c) Is  $U \cap W$  a subspace of  $\mathbb{R}^3$ ?

15. Andaikan  $V = \mathbb{R}^4$ . Selidiki apakah  $W$  *subspace* dari  $V$ , jika :

a)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a - 2d = b + c; a, b, c, d \in \text{Real} \right\}$ .

$$b) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a + 2b + c = 1 + 2d; a, b, c, d \in \text{Real} \right\}$$

16. Andaikan  $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ . Selidiki apakah  $\mathbf{W}$  *subspace* dari  $\mathbf{V}$ , jika :

$$a) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = b + c; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

$$b) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 1; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

17. Andaikan  $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ . Himpunan  $\mathbf{W}$  merupakan himpunan bagian dari  $\mathbf{V}$ . Selidiki apakah himpunan  $\mathbf{W}$  berikut ini merupakan *subspace* (ruang vektor bagian) dari  $\mathbf{V}$ ?. Jelaskan jawab saudara !

$$(a). \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid 2a - b = 3c; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

$$(b). \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 9a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}.$$

18. Andaikan  $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ . Apakah  $\mathbf{W}$  *subspace* dari  $\mathbf{V}$  jika :

$$a) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + 2b - c = 0; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

$$b) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b > 1; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

$$c) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = b - c; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

$$d) \mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b = c + 1; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

19. Andaikan  $V = \mathbb{R}^3$ . Himpunan-himpunan  $U$  dan  $W$  himpunan bagian dari  $V$ , dengan

himpunan  $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = b; \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  dan  $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid b = 2a; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Selidiki

apakah himpunan berikut ini ruang vektor bagian (*subspace*) dari  $V$ ?

- a)  $U$
- b)  $W$
- c)  $U \cap W$

20. Andaikan ruang  $U$  dan  $W$  adalah *subspace* dari  $V$ , buktikan bahwa  $U + W$  juga *subspace* dari  $V$ !

21. Andaikan ruang  $U$  dan  $W$  adalah *subspace* dari  $V$ , buktikan bahwa  $U \cap W$  juga *subspace* dari  $V$ !