

### Latihan 3: Kombinasi Linear, Bergantung Linear, Bebas Linear.

1. Andaikan  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Nyatakan  $s$  sebagai

kombinasi linear dari  $u$ ,  $v$ , dan  $w$ !

2. Andaikan  $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Nyatakan  $u$  sebagai

kombinasi linear dari  $v$ ,  $w$ , dan  $s$ !

3. Andaikan  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Nyatakan  $s$  sebagai

kombinasi linear dari  $u$ ,  $v$ , dan  $w$ !

4. Diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ , dan himpunan vektor  $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ ,

dengan  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , dan  $B_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ . Jika mungkin,

nyatakan  $A$  sebagai kombinasi linear dari vector-vector anggota  $B$ !

5. Diketahui  $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Jika

mungkin, nyatakan  $M$  sebagai kombinasi linear dari  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ !

6. Diketahui  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ . Jika mungkin,

nyatakan  $M$  sebagai kombinasi linear dari  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ !

7. Diketahui  $V$  adalah ruang vektor dari polinomial berderajat 3 atas field bilangan real  $R$ . Andaikan  $u, v, w \in V$  di mana  $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$ ,  $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$ , dan  $w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$ . Nyatakan jika mungkin  $u$ , sebagai kombinasi linear dari  $v$  dan  $w$ !

8. Diketahui  $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Jika mungkin, nyatakan  $M$  sebagai kombinasi linear dari  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ !

9. Diketahui  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , dan  $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Jika mungkin, nyatakan  $M$  sebagai kombinasi linear dari  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  !

10. Diketahui  $\mathbf{V}$  adalah ruang vektor dari polinomial berderajat 3 atas field bilangan real  $\mathbf{R}$ . Andaikan  $u, v, w, s \in \mathbf{V}$  di mana  $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$ ,  $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$ ,  $w = -2t^3 + 2t^2 + 9t - 1$ , dan  $s = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$ . Selidiki  $u, v, w$ , dan  $s$  dependen atau independen ?

11. Selidiki himpunan  $\{u, v, w, s\}$  bebas linear atau bergantung linear? Jika bergantung linear, nyatakan salah satu vektor sebagai kombinasi linear vektor-vektor lainnya!

a)  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

c)  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dan  $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

12. Selidiki himpunan vektor berikut ini bebas linear atau bergantung linear ?

a)  $P = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

b)  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$

c)  $K = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

$$d) L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

13. Andaikan  $P = \{f_1, f_2, f_3\}$ . Selidiki apakah himpunan  $P$  tersebut bebas linear atau bergantung linear, jika :

a)  $f_1 = 3t_1 - t_2 + 2t_3 + t_4$ ,  $f_2 = 2t_1 + 3t_2 - t_3 + 2t_4$ , dan  $f_3 = 5t_1 - 9t_2 + 8t_3 - t_4$

b)  $f_1 = 2t_1 - 3t_2 + 4t_3 - 2t_4$ ,  $f_2 = 3t_1 + 2t_2 - 2t_3 + 5t_4$ , dan  $f_3 = 5t_1 - t_2 + 2t_3 + t_4$

14. Andaikan  $P = \{f_1, f_2, f_3\}$ . Selidiki apakah himpunan  $P$  tersebut bebas linear atau bergantung linear, jika :

a)  $f_1 = 5 - 3t - t^2 + 2t^3$ ,  $f_2 = -1 + 4t + 2t^2 + t^3$ , dan  $f_3 = 3 + 3t - 4t^2 + t^3$

b)  $f_1 = 4 - 3t - 4t^2 + t^3$ ,  $f_2 = 9 - 7t - 7t^2 + 2t^3$ , dan  $f_3 = 3 - 2t - 5t^2 + t^3$

15. Are the vectors  $p_1 = 3 + 8x - 2x^2$ ,  $p_2 = 2 + 5x$ ,  $p_3 = -1 - 3x + 3x^2$  and  $p_4 = 1 + 2x + x^2$  linearly independent or linearly dependent ?

16. Diketahui  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  di mana polinom  $p_1 = -5 + 5t + 3t^2$ ,  $p_2 = 6 + 3t + t^2$ , dan  $p_3 = 1 + 2t + t^2$ . Nyatakan  $p = 4 + 5t + 2t^2$  sebagai kombinasi linear dari polinom-polinom di dalam  $P$ .

17. Diketahui  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , dan  $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Jika mungkin, nyatakan  $M$  sebagai kombinasi linear dari  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  !

18. Diketahui  $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ;  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , dan  $u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

Apakah vektor-vektor di dalam  $L$  tersebut bebas linear atau bergantung linear ?  
Jelaskan !

19. Diketahui  $Q = \{p_1, p_2, p_3\}$  di mana polinom  $p_1 = 1 + 2t + t^2$ ,  $p_2 = 3 + 8t - 2t^2$ , dan  $p_3 = 2 + 5t$ . Nyatakan  $p = -1 - 3t + 3t^2$  sebagai kombinasi linear dari polinom-polinom di dalam  $Q$ .

20. Jika himpunan  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  adalah himpunan vektor-vektor yang bebas linear, tunjukkan bahwa  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ , dan  $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  juga himpunan yang bebas linear!
21. Jika himpunan  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  adalah himpunan vektor-vektor yang bergantung linear, tunjukkan bahwa  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  adalah juga himpunan yang bergantung linear, untuk sembarang vektor  $\mathbf{v}_4$  !
22. Andaikan vektor-vektor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{w}$  adalah bebas linear. Jika  $\mathbf{p} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{r} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ , maka buktikan bahwa  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , dan  $\mathbf{r}$  juga bebas linear.
23. Andaikan vektor-vektor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{w}$  adalah bebas linear. Jika vektor  $\mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$ , dan  $\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ , maka buktikan bahwa  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , dan  $\mathbf{r}$  juga bebas linear.
24. Andaikan vektor-vektor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{w}$  adalah bebas linear. Jika  $\mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ , dan  $\mathbf{r} = \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , maka buktikan bahwa  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , dan  $\mathbf{r}$  juga bebas linear.
25. Untuk sembarang vektor-vektor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{w}$ , serta vektor-vektor  $\mathbf{p} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ , dan  $\mathbf{r} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$ ; **buktikan** bahwa vektor-vektor  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , dan  $\mathbf{r}$  adalah bergantung linear !.