

Latihan 1 : Grup dan Field

1. Andaikan $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Operasi penjumlahan pada H adalah operasi penjumlahan modulo 5. Apakah H merupakan grup? Grup abelian?
2. Andaikan $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Operasi penjumlahan pada H adalah operasi penjumlahan modulo 6. Apakah H merupakan grup? Grup abelian?
3. Andaikan $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Operasi perkalian pada H adalah operasi perkalian modulo 6. Apakah H merupakan grup? Grup abelian?
4. Dengan operasi penjumlahan modulo 8, selidiki apakah himpunan G merupakan Grup? Grup Komutatif?, jika $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5. Dengan operasi penjumlahan modulo 7, selidiki apakah himpunan H merupakan Grup? Grup Komutatif?, jika $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
6. Andaikan $K = \{2y \mid y \in B\}$, di mana B adalah himpunan bilangan bulat. Selidiki apakah K merupakan Grup? Grup Komutatif, jika operasi pada K adalah :
 - a) penjumlahan
 - b) perkalian
7. Andaikan $L = \{2y + 1 \mid y \in B\}$, di mana B adalah himpunan bilangan bulat. Selidiki apakah L merupakan Grup? Grup Komutatif, jika operasi pada L adalah :
 - a) Penjumlahan
 - b) Perkalian
8. Diketahui $M = \{1, -1, i, -i\}$, di mana $i = \sqrt{-1}$. Dengan operasi perkalian, apakah (M, \cdot) merupakan Grup komutatif?
9. Dengan operasi perkalian modulo 8, selidiki apakah himpunan N merupakan Grup? Grup Komutatif?, jika $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
10. Dengan operasi penjumlahan modulo 7, selidiki apakah himpunan P merupakan Grup? Grup Komutatif?, jika $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
11. Andaikan diketahui $a, b \in \mathbb{Q}$, dengan a dan b anggota himpunan bilangan bulat. Operasi $*$ pada \mathbb{Q} didefinisikan $a*b = a + b + 1$. Selidiki apakah $(\mathbb{Q}, *)$ merupakan grup? Grup komutatif?
12. Andaikan diketahui $a, b \in \mathbb{R}$, dengan a dan b anggota himpunan bilangan bulat. Operasi $\#$ pada \mathbb{R} didefinisikan $a\#b = a + b + ab$. Selidiki apakah $(\mathbb{R}, \#)$ merupakan grup? Grup komutatif?
13. Dengan operasi (i) penjumlahan, (ii) perkalian; manakah himpunan di bawah ini yang merupakan grup? Grup komutatif?. Jelaskan jawab saudara !
 - a) Himpunan bilangan asli
 - b) Himpunan bilangan cacah
 - c) Himpunan bilangan bulat
 - d) Himpunan bilangan rasional
 - e) Himpunan bilangan real

14. Diketahui $S = \{\text{semua matriks berdimensi } 2 \times 2\}$. Dengan operasi penjumlahan matriks, selidiki apakah $(S, +)$ merupakan grup? Grup komutatif?
15. Diketahui $T = \{\text{semua matriks berdimensi } 2 \times 2\}$. Dengan operasi perkalian matriks, selidiki apakah (T, \cdot) merupakan grup? Grup komutatif?
16. Dengan operasi penjumlahan modulo 8 dan perkalian modulo 8, selidiki apakah himpunan F merupakan Field ?, jika $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
17. Dengan operasi penjumlahan modulo 7 dan perkalian modulo 7, selidiki apakah himpunan W merupakan Field ?, jika $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
18. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian, selidiki himpunan bilangan manakah yang merupakan field ?
- Himpunan bilangan bulat
 - Himpunan bilangan rasional
 - Himpunan bilangan real
 - Himpunan bilangan kompleks
19. Andaikan $F = \{ (a + b\sqrt{5}) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ di mana \mathbb{R} himpunan bilangan real, dengan operasi penjumlahan dan perkalian apakah merupakan field ?
20. Andaikan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ dengan } a \neq 0 \text{ atau } b \neq 0 \right\}$. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian, apakah M merupakan field ?
21. Diketahui $a, b \in \mathbb{N}$ dengan a dan b anggota himpunan bulat. Operasi $\#$ pada \mathbb{N} didefinisikan $a\#b = a + b - 1$, dan operasi $*$ pada \mathbb{N} didefinisikan $a*b = a + b + ab$. Selidiki apakah $(\mathbb{N}, \#, *)$ merupakan field?
22. Diketahui $E = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{B}\}$, \mathbb{B} adalah himpunan bilangan bulat. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian, selidiki apakah $(E, +, \cdot)$ merupakan field?.
23. Verify the set of all quotients $\frac{P(x)}{Q(x)}$ of polynomials in x with real coefficients constitute fields.
24. Diketahui $M = \{\text{semua matriks berdimensi } 2 \times 2\}$. Dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar terhadap matriks, selidiki apakah $(M, +, \cdot)$ merupakan field?
25. Diketahui $S = \{\text{semua matriks berdimensi } 2 \times 2\}$. Dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian matriks, selidiki apakah $(S, +, \cdot)$ merupakan field?

26. Verify that the set of all 2×2 matrices of the form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ where a and b are rational numbers, forms a field. Show that this is a subfield of the field of all 2×2 matrices of the form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ where a and b are real numbers.
27. Diketahui P adalah semua polinom berderajat dua, $P = \{ a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$ di mana \mathbb{R} adalah himpunan bilangan real. Dengan operasi penjumlahan polinom dan perkalian skalar terhadap polinom, apakah P merupakan field ?