Latihan 5: Transformasi Linear

1. Diketahui basis $\boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{b}1, \boldsymbol{b}2, \boldsymbol{b}3\}$ dan basis $\mathbf{g} = \{g1, g2, g3\}$, di mana $\boldsymbol{b}1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   $\boldsymbol{b}2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{b}3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sedangkan $\mathbf{g}1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{g}3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Andaikan vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Carilah kordinat relatif $\boldsymbol{u}$ terhadap :

   (a) basis $\{\boldsymbol{b}\}$; (b) basis $\{\mathbf{g}\}$

2. Find a relative coordinate $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$ to the basis $\mathbf{B} = \{\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}\}$, if

   $\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Basis lain dari R^3 adalah basis {f}, di mana $\mathbf{f}1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{f}3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Andaikan vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Carilah :

   (a) matriks transisi yang membawa basis natural $\{\mathbf{e}\}$ ke basis $\{\mathbf{f}\}$
   (b) dengan menggunakan matriks transisi tersebut, cari koordinat relative u terhadap basis {f}.

4. Suppose another basis of R^3 is basis $g = \{g_1, g_2, g_3\}$, where $g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   and $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. If vector $\boldsymbol{u}$ in R^3 have a relative coordinate (-1, 6, -7) to the natural basis {e}, find a relative coordinate $\boldsymbol{u}$ to the basis {g} using transition matrices.

5. Dengan menggunakan matriks transisi, Carilah koordinat relatif vektor $\boldsymbol{u}$ tehadap basis g = {g_1, g_2, g_3}, dengan $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $g_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; jika vektor $\boldsymbol{u}$ di R^3 mempunyai koordinat relatif (7, -6, 1) terhadap basis {e}.

6. Using transition matrix, find relative coordinate of $\boldsymbol{u}$ to the basis g = {g_1, g_2, g_3}, where $g_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, and $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; if vector $\boldsymbol{u}$ in R^3 have a relative coordinate (-5, 0, 7) to the natural basis {e}.

7. Diketahui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$, dan basis **B** = {$\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$}, dengan $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Carilah koordinat relatif $\boldsymbol{A}$ terhadap basis **B** !.

8. Di antara transformasi T berikut ini, manakah yang merupakan transformasi linear ?

(a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ x+2y+4 \end{pmatrix}$

(b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ -3x+2y-4z \end{pmatrix}$

(c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-5z \\ 3x-y+2z \\ 2x+y-z \end{pmatrix}$

9. Andaikan transformasi T : $R^4 \rightarrow R^3$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z+t \\ 3x-y+2z-2t \\ -4x+3y-3z+3t \end{pmatrix}$.

   (a) Carilah matriks transformasi T !

   (b) Jika vektor-vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, carila T($\boldsymbol{u}$) dan T($\boldsymbol{v}$) !

10. Carilah rumus transformasi untuk T: $R^2 \rightarrow R^2$ yang memetakan vektor-vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. Carilah rumus transformasi T : $R^3 \rightarrow R^2$ yang memetakan vektor-vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

12. Carilah rumus transformasi T : $R^3 \rightarrow R^3$ yang memetakan vektor-vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

13. Carilah sebuah matriks berdimensi 2x2 yang memetakan vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

14. Carilah sebuah matriks berdimensi 2x2 yang memetakan vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. Diketahui transformasi T: $R^2 \rightarrow R^2$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ 2x \end{pmatrix}$.

L adalah sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Carilah T(L) !.

16. Diketahui T: $R^2 \rightarrow R^2$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+5y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$. Jika L adalah sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Carilah T(L) !.

17. Andaikan transformasi T: $R^3 \rightarrow R^3$ dengan formula $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-2z \\ y-3z \end{pmatrix}$. Jika B adalah sebuah bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Carilah T(B) !.

18. Andaikan transformasi T: $R^3 \rightarrow R^3$ dengan formula $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-2z \\ y-3z \end{pmatrix}$. Jika M adalah sebuah bidang dengan persamaan $x + 2y - 3z = 4$. Carilah T(M) !.

19. Andaikan transformasi T : $R^5 \rightarrow R^4$, dengan rumus transformasi :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+5z+9t \\ 3x-2y+z-t \\ -x-z-t \\ 2x+3y+5z+s+8t \end{pmatrix}$$

Carilah :

(a) matriks transformasi **T**

(b) dimensi dan basis dari ruang peta **T**

(c) dimensi dan basis kernel **T**

20. Diketahui transformasi T : $\mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, dengan rumus transformasinya adalah :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-s \\ 2x+6y-3z-3s \\ 3x+10y-6z-5s \end{pmatrix}$$ Carilah basis dan dimensi dari :

(a) ruang peta Im(T)

(b) ruang nol Ker(T)

21. Carilah basis dan dimensi dari ruang penyelesaian sistem

$$\begin{cases} x+2y+z-s+3w=0 \\ 2x+4y+2z-s+7w=0 \\ x+2y+2z+s+2w=0 \end{cases}$$

22. **T** : **R⁴** → **R³** dengan rumus **T**$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z+4w \\ -3x+6y-z+2w \\ x-2y+z+w \end{pmatrix}$. Cari basis dan dimensi dari ruang peta dan ruang nol.

23. **T** : R^5 → R^4, dengan rumus transformasinya **T**$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+2x_4+x_5 \\ -x_1-2x_2+x_3+x_4 \\ x_1+2x_2-3x_3-7x_4+2x_5 \\ x_1+2x_2-2x_3-4x_4+3x_5 \end{pmatrix}$.

    Carilah basis dan dimensi dari :
    (a) ruang peta
    (b) ruang nol

24. Transfomrasi T : R^4 → R^4, dengan rumus : T$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+2z+s \\ 3x+2y-z-2s \\ 2x-y+z-3s \\ x-2y+3z-2s \end{pmatrix}$. Carilah basis dan dimensi dari :
    (a) Ruang peta
    (b) Ruang Nol

25. Transformasi T : R^4 → R^5 dengan rumus T$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z-s \\ x+y-z+s \\ -2x-3y-z+2s \\ 2x+3y-4z \\ 4x+6y-3z-2s \end{pmatrix}$. Carilah basis dan dimensi dari :
    (a) Ruang peta
    (b) Ruang nol

26. Apakah tranformasi linear T: R^2 →R^3 dengan rumus transformasinya T$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$ singular atau nonsingular ?

27. Apakah tranformasi linear T: $R^3 \rightarrow R^3$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+7z \\ 2x+3y+5z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ singular atau nonsingular ?

28. Apakah tranformasi linear T: $R^3 \rightarrow P_2(t)$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ (x+2y+2z)t \\ (x+y)t^2 \end{pmatrix}$ singular atau nonsingular ?

29. Apakah tranformasi linear T: $R^3 \rightarrow P_2(t)$ dengan rumus transformasinya $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ (x-y)t \\ (x+2y)t^2 \end{pmatrix}$ singular atau nonsingular ?

30. Pada transformasi linear T : $R^n \rightarrow R^m$, buktikan bahwa ruang peta Im(T) adalah *subspace* dari R^m !.
31. Pada transformasi linear T : $R^n \rightarrow R^m$, buktikan bahwa ruang nol Ker(T) adalah *subspace* dari R^n !.