Latihan 6: Inner Product

1. Diketahui vektor $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in R^3$ di mana $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Hitunglah :
   a. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}$
   b. $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$
   c. $3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$
   d. $(3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$
   e. $3(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}) - 2(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w})$
   f. $\boldsymbol{w}.\boldsymbol{w}$

2. Diketahui vektor $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in R^3$ di mana $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Carilah :

   a.inner product dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$
   b. panjang vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$
   c. jarak antrara vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$
   d. sudut antara vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$

3. Andaikan $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in R^n$, dan k adalah skalar, buktikan bahwa :
   a. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$
   b. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$
   c. $(k\boldsymbol{u}).\boldsymbol{v} = k\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})$
   d. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} \geq 0$

4. a. Tunjukkan bahwa vektor-vektor $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   adalah himpunan vektor-vektor yang ortogonal di dalam R^4.
   b. dengan melakukan normalisasi masing-masing vektor $\boldsymbol{u}_\mathbf{i}$ dari soal a) tersebut carilah himpunan vektor-vektor yang ortonormal dalam R^4 !
   c. Nyatakan vektor $\boldsymbol{w} = (1, 1, 1, 1)$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor ortonormal dari soal b) tersebut.

5. Andaikan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor di dalam R^2, dengan $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Carilah nilai k sedemikian hingga :
   a. $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ ortogonal
   b. sudut antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah $\pi/4$
   c. $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ sejajar

6. Pada ruang R^3, tentukan vektor $\boldsymbol{w}$ yang tidak nol yang orthogonal terhadap vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$!.
7. Find two vectors in R^3 which have norm 1 and orthogonal to the vectors $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, and $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$!
8. Andaikan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^3$ di mana $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Carilah vektor $\boldsymbol{w} \in R^3$ yang orthogonal terhadap vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ tersebut !.
9. Andaikan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$, buktikan bahwa $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah bergantungan linear (*linearly dependence*)!
10. Ruang vektor V pada R^3, dengan basis lain dari V = $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ di mana $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

    a. apakah vektor-vektor di dalam V orthogonal?

    b. apakah vektor-vektor di dalam V saling bebas linear (*linearly independence*)?

    c. nyatakan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di dalam V.
11. Ruang vektor W pada R^4, dengan basis lain dari W = $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ di mana $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    a. apakah vektor-vektor di dalam W orthogonal?

    b. apakah vektor-vektor di dalam W saling bebas linear (*linearly independence*)?

c. nyatakan $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$.

d. carilah koordinat vektor $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ relative terhadap basis W.

12. Ruang vektor V pada R^3, dengan basis lain dari V = {$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$} di mana $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan basis V tersebut ke dalam basis orthonormal !
13. Ruang vektor V pada R^3, dengan basis lain dari V = {v_1, v_2, v_3} di mana $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan basis V tersebut ke dalam basis orthonormal !
14. Dengan proses Gram-Schmidt, carilah basis orthonormal dari ruang vektor V, jika basis lain dari V = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ }
15. Ruang vektor **V** dalam R^4. Basis lain dari ruang vektor adalah **V** = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ }.

    Gunakan ortogonalisasi dari Gram-Schmidzt untuk mencari basis ortonormal dari ruang vektor **V** tersebut !.

16. Basis lain dari R^4 adalah basis **U** = {$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$} dengan $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan basis **U** tersebut ke dalam basis ortonormal !

17. Basis lain dari R^4 adalah basis **V** = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$} dengan $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mentransformasikan basis **V** tersebut ke dalam basis ortonormal !

18. Cari basis orthogonal dari R^3 jika salah satu vektor basisnya adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$!

19. Tentukan basis bagi ruang bagian W pada R^4 yang orthogonal terhadap vektor-vektor $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

20. Find orthonormal basis of V = R^3, if given another basis of V = {X_1, X_2, X_3} where $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ and $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

21. Carilah basis orthonormal dari R^3, jika diketahui salah satu vektor basisnya adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$!

22. Carilah basis orthonormal dari R^3, jika diketahui salah satu vektor basisnya adalah $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$!

23. Carilah basis orthonormal dari R^3, jika diketahui salah satu vektor basisnya adalah $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$!

24. Andaikan matriks $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Selidiki :

    a. apakah matriks $\boldsymbol{P}$ orthogonal?
    b. carilah $\boldsymbol{P}^{-1}$. Apakah matriks $\boldsymbol{P}^{-1}$ orthogonal?
    c. berapakah det($\boldsymbol{P}$) ? dan det($\boldsymbol{P}^{-1}$) ?
    d. carilah $\boldsymbol{P}^{T}$ (transpose dari $\boldsymbol{P}$). Apakah $\boldsymbol{P}^{T}$ orthogonal ?
    e. hitunglah $\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{P}^{T}$. apakah hasilnya matriks orthogonal?

25. Berapakah nilai *x*, *y*, dan *z*, jika matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ adalah orthogonal ?.

26. Carilah matriks orthogonal **P** yang berdimensi 3x3 yang baris pertamanya $(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$!

27. Jika matriks **A** adalah simetri miring (*skew-symmetric*) serta (**I** + **A**) adalah nonsingular, tunjukkan bahwa matriks $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}$ adalah orthogonal !

28. Berdasarkan hasil soal nomor 27 tersebut, carilah matriks orthogonal **P**, jika matriks :

    a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

    b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

29. Jika matriks **B** = **AP** dengan matriks **A** orthogonal dan matriks **P** nonsingular, tunjukkan bahwa $\boldsymbol{PB}^{-1}$ adalah orthogonal !

30. Jika matriks **A** adalah orthogonal serta (**I** + **A**) adalah nonsingular, tunjukkan bahwa matriks $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}$ adalah simetri miring !

31. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

    a. selidiki apakah matriks transformasi **A** orthogonal?.

b. jika vektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, carilah panjang vektor $\boldsymbol{u}$?

c. jika $\boldsymbol{w}$ adalah peta vektor $\boldsymbol{u}$ oleh transformasi $\boldsymbol{A}$, carilah vektor $\boldsymbol{w}$!

d. berapakah panjang vektor $\boldsymbol{w}$? apakah sama dengan panjang $\boldsymbol{u}$?

32. Buktikan bahwa transformasi orthogonal tidak mengubah panjang vektor !
33. Jika matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah commute, serta matriks $\boldsymbol{P}$ orthogonal, buktikan bahwa matriks $\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{AP}$ dan $\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{BP}$ adalah commute.