Latihan 7 : Similaritas, Pendiagonalan Matriks, Polinom Matriks

1. Tentukan polinomial karakteristik dari matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$!
2. Andaikan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi berdimensi 2x2. Polinom karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah $P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^2 + b\lambda + c$. Tunjukkan bahwa $b = -\text{trace}(\boldsymbol{A})$ dan $c = \det(\boldsymbol{A})$.
3. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Syarat apa yang harus dipenuhi untuk x, y, z, dan t, jika matriks transformasi $\boldsymbol{T}$ tersebut:
   (a) mempunyai dua buah akar karakteristik (*eigenvalue*) real yang berbeda.
   (b) hanya mempunyai satu buah akar karakteristik.
   (c) tidak mempunyai akar karakteristik real.
4. Tentukan akar dan vektor karakteristik (*eigen value and eigen vectors*) dari matriks transformasi $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ -5 & -15 & -4 \end{pmatrix}$!.
5. Buktikan bahwa matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{A}^T$ mempunyai akar karakteristik yang sama!
6. Andaikan berturut-turut $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, .., \boldsymbol{X}_n$ adala vektor karakteristik dari akar-akar karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ dari suatu matriks transformasi $\boldsymbol{A}$, buktikan bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, .., \boldsymbol{X}_n$ adalah bebas linear (*linearly independence*).
7. Jika $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ adalah akar-akar karakteristik dari suatu matriks transformasi $\boldsymbol{A}$, serta k adalah sembarang skalar, tunjukkan bahwa $k\lambda_1, k\lambda_2, .., k\lambda_n$ adalah akar-akar karakteristik dari suatu matriks transformasi $k\boldsymbol{A}$!
8. Jika $\boldsymbol{X}$ adalah vektor satuan (*unit vector*) dan $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$, buktikan bahwa $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX} = \lambda$.
9. Jika $\boldsymbol{D}$ adalah matrks diagonal, tunjukkan bahwa akar-akar karakteristik dari matriks $\boldsymbol{D}$ adalah elemen-elemen diagonal matriks $\boldsymbol{D}$ tersebut, dan vektor-vektor invariannya adalah basis natural {e}.
10. Andaikan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan matriks $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ mempunyai akar karakteristik yang sama, tetapi $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ tidak similar !
11. Andaikan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang similar. Buktikan bahwa :
   (a) $\boldsymbol{A}^T$ dan $\boldsymbol{B}^T$ adalah similar

(b) $\boldsymbol{A}$ invertibel jika dan hanya jika $\boldsymbol{B}$ invertibel

12. Jika $\boldsymbol{A}$ similar $\boldsymbol{B}$, buktikan bahwa $\boldsymbol{A}^{-1}$ juga similar dengan $\boldsymbol{B}^{-1}$!
13. if $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are similar, prove that $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ have same characteristics root (eigen value)!
14. JIka matriks persegi $\boldsymbol{A}$ berdimensi nxn mempunyai n vektor invariant yang bebas linear, buktikan bahwa mariks $\boldsymbol{A}$ similar dengan matriks diagonal !
15. Jika $\boldsymbol{A}$ similar dengan $\boldsymbol{B}$, dan $\boldsymbol{B}$ similar dengan $\boldsymbol{C}$, buktikan bahwa $\boldsymbol{A}$ similar dengan $\boldsymbol{C}$!
16. Apakah matiks $\boldsymbol{A}$ berikut ini diagonalisabel?. Jika ya, carilah matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal yang mempunyai elemen diagonal akar karakteristik dari $\boldsymbol{A}$) !.

    (a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

    (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

    (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

17. Diketahui matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Apakah $\boldsymbol{A}$ diagonalisabel ?.

    Jika matriks transformasi $\boldsymbol{A}$ tersebut diagonalisabel, carilah matriks nonsingular $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal yang mempunyai elemen diagonal akar karakteristik dari $\boldsymbol{A}$) !.
18. Andaikan transformasi T : $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ dengan rumus transformasinya adalah $\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+3y-4z \\ 2x+y-2z \end{pmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks transformasi T tersebut!. Apakah matriks $\boldsymbol{T}$ diagonalisabel? Jika ya, cari matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{TP} = \boldsymbol{D}$, dengan $\boldsymbol{D}$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya akar karakteristik dari $\boldsymbol{T}$!
19. Andaikan diketahui matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Syarat apa yang harus dipenuhi bagi a, b, c, dan d, supaya matriks $\boldsymbol{A}$ tersebut diagonalisabel (dapat didiagonalkan)?

20. Apakah matriks $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, cari matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathbf{D}$, dengan $\boldsymbol{D}$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya akar karakteristik dari $\boldsymbol{A}$!

21. Andaikan matriks $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Apakah $\boldsymbol{A}$ diagonalisabel ?, jika ya, cari $\boldsymbol{P}$ sehingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (diagonal). !

22. Diketahui matriks transformasi $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Apakah $\boldsymbol{A}$ diagonalisabel ?. Jika matriks transformasi $\boldsymbol{A}$ tersebut diagonalisabel, carilah matriks nonsingular $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal yang mempunyai elemen diagonal akar karakteristik dari $\boldsymbol{A}$) !.

23. Diketahui matriks transformasi $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Apakah matriks $\boldsymbol{A}$ diagonalisabel ? Jika ya, carilah matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ = Diagonal !

24. Apakah matriks $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, carilah matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal).

25. Apakah matriks $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, carilah matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal).

26. Diketahui matrik transformasi $\boldsymbol{A}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Apakah matriks $\boldsymbol{A}$ diagonalisabel ? Jika ya, carilah matriks $\boldsymbol{P}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ = Diagonal !

27. Jika matriks transformasi $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetri, serta $\boldsymbol{X}_1$ dan $\boldsymbol{X}_2$ adalah vektor karakteristik (*eigen vectors*) dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang berasal dari akar karakteristik yang berbeda, buktikan bahwa $\boldsymbol{X}_1$ dan $\boldsymbol{X}_2$ adalah saling orthogonal !.

28. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Untuk matriks ***A*** tersebut, mengapa pasti terdapat matriks orthogonal ***R*** sedemikian hingga $\boldsymbol{R^T A R} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal yang elemen diagonalnya akar karakteristik dari ***A***) ?. Kemudian carilah matriks ***R*** tersebut !.

29. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Untuk matriks ***B*** tersebut, mengapa pasti terdapat matriks orthogonal ***R*** sedemikian hingga $\boldsymbol{R^T B R} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal yang elemen diagonalnya akar karakteristik dari ***B***) ?. Kemudian carilah matriks ***R*** tersebut !.

30. Diketahui matrik transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) Apakah matriks ***A*** diagonalisabel ? Jika ya, carilah matriks ***P*** sedemikian hingga $\boldsymbol{P^{-1} A P}$ = Diagonal !

    (b) Untuk matriks ***A*** tersebut di atas, tentukan juga matriks ortogonal ***R*** sedemikian hingga $\boldsymbol{R^T A R}$ = diagonal !

31. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Carilah matriks ortogonal ***P*** yang mendiagonalkan matriks ***A*** sedemikian hingga $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{D}$!

32. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Carilah matriks ortogonal ***R*** sehingga $\boldsymbol{R^T B R} = \boldsymbol{D}$ (diagonal). !.

33. Carilah matriks ortogonal ***P*** sedemikian hingga $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal), jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$!

34. Carilah matriks ortogonal ***P*** sedemikian hingga $\boldsymbol{P^T A P} = \boldsymbol{D}$ (matriks diagonal), jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$!

35. Andaikan matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Carilah matriks ortogonal $\boldsymbol{P}$ yang mendiagonalkan matriks $\boldsymbol{A}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{P^T A P = D}$!

36. Cari matriks ortogonal $\boldsymbol{R}$ dan matriks diagonal $\boldsymbol{D}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{R^T A R} = \boldsymbol{D}$, jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$!

37. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetri dan $\boldsymbol{P}$ adalah matriks orthogonal, tunjukkan bahwa $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ adalah matriks simetri.

38. Tentukan polinom karakteristik dan polinom minimum dari matriks :

    (a) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

    (b) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

39. Tentukan polinom karakteristik dan polinom minimum dari matriks :

    (a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

    (b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

    (c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ -5 & -15 & -4 \end{pmatrix}$

40. Diketahui matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Carilah masing-masing polinom karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan matriks $\boldsymbol{B}$.

    (b) Carilah masing-masing plinom minimum dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan matriks $\boldsymbol{B}$.

    (c) Apa yang dapat disimpulkan dari hasil (a) dan (b) tersebut?

41. Diketahui matriks transformasi $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Carilah :

    (a). Polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$.

(b). Polinom minimum dari $\boldsymbol{A}$.

(c). berdasarkan hasil (a) atau (b) tersebut, cari invers dari $\boldsymbol{A}$.

42. Tunjukkan bahwa matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ mempunyai polinomial minimum yang sama!